České vysoké učení technické
v Praze
Fakulta biomedicínského inženýrství

Úloha KA03/č. 8:

Měření zatížení protéz dolních končetin tenzometrickou soupravou

Ing. Patrik Kutílek, Ph.D., Ing. Adam Žižka
(kutilek@fbmi.cvut.cz, zizka@fbmi.cvut.cz)

Poděkování:

Tato experimentální úloha vznikla za podpory Evropského sociálního fondu v rámci realizace projektu **„Modernizace výukových postupů a zvýšení praktických dovedností a návyků studentů oboru Biomedicínský technik", CZ.1.07/2.2.00/15.0415.**

Období realizace projektu 11. 10. 2010 – 28. 2. 2013.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

8. Měření zatížení protéz dolních končetin tenzometrickou soupravou

Úkoly měření a výpočtu

- Určete velikost namáhání a deformace pro průřez mezikruží protetické náhrady zatížené na tlak pro různé velikosti zatěžujících sil. Ověřte teoreticky získané výsledky s výsledky měření. Dokažte Hookeův zákon.
- Nalezněte velikost namáhání a deformace pro průřez mezikruží protetické náhrady zatížené na ohyb pro různé velikosti ohybového momentu. Ověřte teoreticky získané výsledky s výsledky měření. Dokažte Hookeův zákon.
- Určete velikost namáhání a deformace pro průřez mezikruží protetické náhrady zatížené na smyk pro různé velikosti kroutícího momentu. Ověřte teoreticky získané výsledky s výsledky měření.
- Určete konstanty tuhosti jednotlivých elastických prvků.
- Určete konstanty tuhosti elastických prvků zapojených paralelně a v sérii, a dokažte platnost vztahů.

Teoretický základ řešených úloh

Mechanické vlastnosti pevných materiálů popisujeme tzv. reologickou látkou, Hookeovou pružnou, která je charakterizována elastickými vlastnostmi materiálu. Elastický materiál je takový materiál, který se po zatížení vrátí do původního stavu před zatížením. Nechť u_e je výchylka od stabilní polohy l_0, pak vratná síla $\vec{F}_e$ materiálu:

$$\vec{F}_e = k \cdot u_e, \qquad (1)$$

kde k je konstanta pružiny, resp. koeficient tuhosti. Jestliže na elastický materiál působí v podélném směru síla, pak je tato síla rovna vratné síle. Prodloužení materiálu je tedy úměrné obecné zatěžující síle působící ve směru normály:

$$u_e = \frac{1}{k} \cdot \vec{F}. \qquad (2)$$

Délku pružiny po zatížení obecnou silou ve směru normály tedy určíme vztahem:

$$l' = l + \frac{\vec{F}}{k}. \qquad (3)$$

Dělením prodloužení u_e původní délkou l získáme informaci o deformaci, která není závislá na délce tyče. Toto bezrozměrné číslo se označuje ε_e a nazývá se poměrné prodloužení (relativní deformace):

$$\varepsilon_e = \frac{u_e}{l} = k' \cdot \frac{\vec{F}}{S} = k' \cdot \sigma_e = \frac{1}{E} \cdot \sigma_e. \qquad (4)$$

Odvozený vztah reprezentuje Hookeův zákon pro tah a tlak v oblasti malých napětí a malých pružných deformací, kde je závislost mezi mechanickým napětím a deformací lineární. Podíl působící síly $\vec{F}$ a průřezu tyče S představuje mechanické napětí a v případě tahového a tlakového působení, kdy je síla kolmá na průřez, takové napětí nazýváme normálové napětí. Veličina E je modul pružnosti v tahu neboli Youngův modul. Modul pružnosti závisí pouze na vlastnostech materiálu tělesa a nikoli na jeho rozměrech. Modul pružnosti je však závislý na teplotě - s rostoucí teplotou klesá. Hookeův zákon pro tah bývá obvykle vyjadřován slovně ve tvaru: „Napětí je úměrné poměrnému prodloužení.“, tj.:

$$\sigma_e = \frac{\vec{F}}{S} = E \cdot \frac{u_e}{l} = E \cdot \varepsilon_e.$$

Tyto vlastnosti mají také matriály konstrukcí protetických náhrad, u kterých studujeme jejich pevnost a deformaci. Za tímto účelem se používá tenzometrických systémů měření deformací.

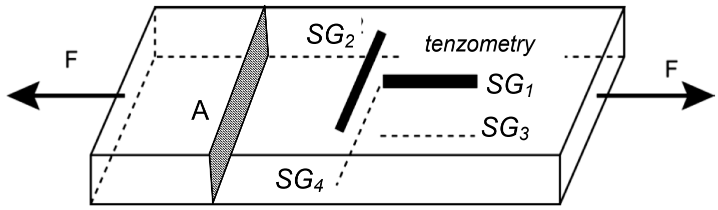
Výpočet namáhání taženého/tlačeného prutu
Pro namáhání tahem/tlakem z Hookeova zákona víme, že namáhání od normálové síly je:

$$\sigma_n = \varepsilon_n \cdot E\,, \tag{5}$$

kde ε_n je délkové přetvoření od normálové síly, σ_n je velikost hledaného namáhání a E je modul elasticity (Youngův modul pružnosti v tahu). Pro normálové namáhání víme také, že:

$$\sigma_n = \frac{\vec{F}}{A}\,, \tag{6}$$

kde $\vec{F}$ je velikost zatěžující síly a A je průřez namáhaného profilu, který je kolmý na směr zatěžující síly. Z uvedeného je zřejmé, že pokud zjistíme tenzometrickým můstkem ε_n a známe rozměrové a materiálové vlastnosti měřených konstrukčních prvků, můžeme určit σ_n a $\vec{F}$.



Obr.3: Zapojení tenzometrů pro měření tahu/tlaku.

Výběr zapojení tenzometrů a výpočet hledaného namáhání od normálové síly dle změřeného přetvoření tenzometrů:

Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření	Měřené výstupní napětí	Namáhání od normálové síly
čtvrtmůstek	SG_1	$\varepsilon_V = \varepsilon_n$	$\Delta U_V = \frac{U_n}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_n$	$\sigma_n = \varepsilon_V \cdot E$
půlmůstek	SG_1, SG_2	$\varepsilon_V = (1+\mu)\cdot\varepsilon_n$	$\Delta U_V = \frac{(1+\mu)\cdot U_n}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_n$	$\sigma_n = \frac{\varepsilon_V \cdot E}{1+\mu}$
plný most	SG_1, SG_1, SG_3, SG_4	$\varepsilon_V = 2\cdot(1+\mu)\cdot\varepsilon_n$	$\Delta U_V = \frac{(1+\mu)\cdot U_n}{2} \cdot k \cdot \varepsilon_n$	$\sigma_n = \frac{\varepsilon_V \cdot E}{2\cdot(1+\mu)}$

Tab.1: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tensometrů - tah-tlak, [9].

Výpočet namáhání ohýbaného prutu
Velikost namáhání od ohybového momentu je určena vztahem:

$$\sigma_o = \frac{\vec{M}_o}{W_o} = \frac{\vec{F} \cdot l}{W_o}, \qquad (7)$$

kde $\vec{M}_o$ je ohybový moment a W_o je průřezový modul v ohybu daný rozměrovými parametry a tvarem průřezu testovaného profilu. Modul průřezu W_o má hodnoty:

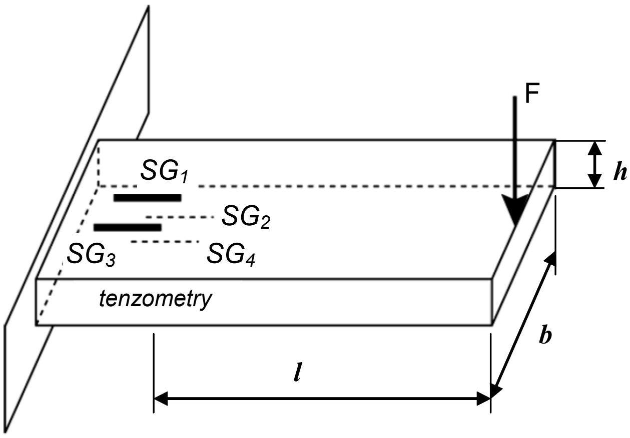
pro kruhový průřez: $$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \qquad (8)$$

pro mezikruží $$W_0 = \frac{\pi \cdot \left(d_1^4 - d_2^4\right)}{32 \cdot d_1}, \qquad (9)$$

kde d_1 je vnější průměr a d_2 je vnitřní průměr průřezu,

pro čtvercový průřez: $$W_0 = \frac{a^3}{6}, \qquad (10)$$

pro obdélníkový průřez: $$W_0 = \frac{b \cdot h^2}{6}. \qquad (11)$$



Obr.4: Používané zapojení tenzometrů pro měření ohybu.

Výběr zapojení tenzometrů a výpočet hledaného namáhání od ohybového momentu dle změřeného přetvoření tenzometru:

Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření	Měřené výstupní napětí	Namáhání od ohybového momentu
čtvrtmůstek	SG_1	$\varepsilon_V = \varepsilon_o$	$\Delta U_V = \frac{U_n}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_o$	$\sigma_o = \varepsilon_V \cdot E$
půlmůstek	SG_1, SG_2	$\varepsilon_V = 2 \cdot \varepsilon_0$	$\Delta U_V = \frac{U_n}{2} \cdot k \cdot \varepsilon_o$	$\sigma_o = \frac{\varepsilon_V}{2} \cdot E$
plný most	SG_1, SG_1, SG_3, SG_4	$\varepsilon_V = 4 \cdot \varepsilon_0$	$\Delta U_V = U_n \cdot k \cdot \varepsilon_o$	$\sigma_o = \frac{\varepsilon_V}{4} \cdot E$

Tab.2: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tenzometrů – ohyb, [9].

<u>Výpočet namáhání smykem namáhaného prutu</u>

Pro smyk platí obdobné předpoklady jako pro krut, vztah mezi smykovým napětím vytvářeným tangenciální silou a zkosem je:

$$\tau_s = G \cdot \gamma. \qquad (12)$$

Zapojení tenzometrů a výpočet hledaného namáhání od tangenciální síly dle změřeného přetvoření:

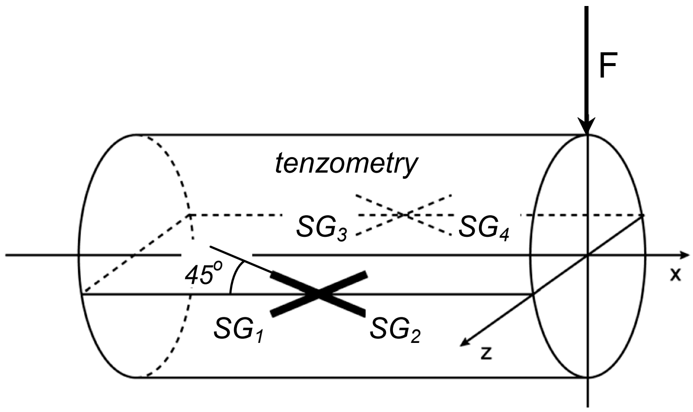
Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření (pod úhlem 45°)	Měřené výstupní napětí	Namáhání od tangenciální síly
plný most	SG_1, SG_1, SG_2, SG_2	$\varepsilon_V = 4 \cdot \varepsilon_s = 2 \cdot \gamma$	$\Delta U_V = U_n \cdot k \cdot \varepsilon_s$	$\tau_s = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_V \cdot G$

Tab.4: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tenzometrů – smyk, [9].

Vlastní výpočet velikost síly je složitější a je opět dán průřezovými charakteristikami definovanými např. tvarovým faktorem, který výpočet zjednodušuje:

$$\tau_s = \frac{F}{A} \cdot c_A, \qquad (13)$$

kde pro kruhový průřez $c_A=4/3$, mezikruží $c_A=2$, obdélníkový $b/h \le 1/2$ je $c_A=3/2$.



Obr.6: Používané zapojení tenzometrů pro měření smyku.