



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA BIOMEDICÍNSKÉHO INŽENÝRSTVÍ**

Vybrané kapitoly z experimentální biomechaniky

Patrik Kutílek
Adam Žižka

Vybrané kapitoly z experimentální biomechaniky

**Patrik Kutílek
Adam Žižka**

2012

České vysoké učení technické v Praze

Lektor: Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Česká technika – nakladatelství ČVUT upozorňuje autory na dodržování autorských práv. Za jazykovou a věcnou správnost obsahu díla odpovídá autor. Text neprošel jazykovou ani redakční úpravou.

© Patrik Kutílek, Adam Žižka, 2012

ISBN 978-80-01-04993-8

Poděkování:

Tato publikace vznikla za podpory Evropského sociálního fondu v rámci realizace projektu „Modernizace výukových postupů a zvýšení praktických dovedností a návyků studentů oboru Biomedicínský technik“, CZ.1.07/2.2.00/15.0415.

Období realizace projektu 11. 10. 2010 – 28. 2. 2013.



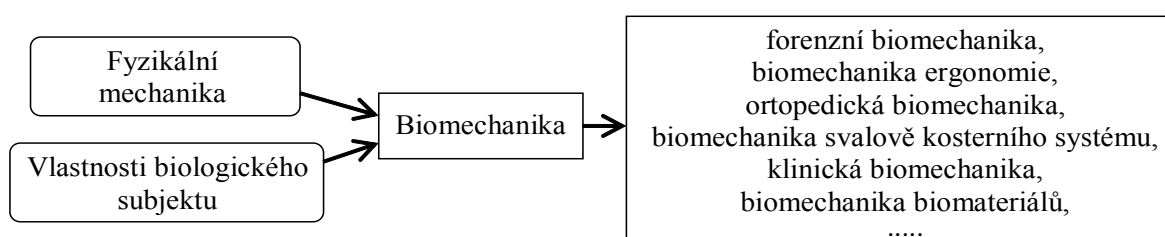
Obsah

I.	Úvod	1
II.	Vybrané části z biomechaniky pohybu	3
2.1	Inerciální systémy a studium kinematiky a dynamiky	3
2.2	Sledovací systémy a studium kinematiky a dynamiky	8
2.3	Mechanika hodů a skoků	22
2.4	Kinematika a dynamika rotačního pohybu	24
2.5	EMG signál a hodnocení aktivity svalů	29
III.	Vybrané aplikace řešení silových a momentových účinků v biomechanice	35
3.1	Momenty a síly v zápěstí a prstech ruky	35
3.2	Mechanismus středního ucha	38
3.3	Silové poměry v předloktí horní končetiny	42
3.4	Silové poměry v rameni	51
3.5	Zatížení segmentů dolní končetiny při chůzi	58
3.6	Silové poměry v koleni	63
3.7	Zatížení kyčelního kloubu	70
3.8	Zatížení páteře a přibližný výpočet namáhání obratle	74
3.9	Stabilita těla a měření kontaktních sil pod dolními končetinami	79
3.10	Forenzní biomechanika a hodnocení úrazů	86
3.11	Ergonomie a hodnocení fyzické zátěže	90
3.12	Dynamika skoku do výšky	93
3.13	Silové účinky při pohybu na lyžích	96
IV.	Vybrané úlohy z protetiky	98
4.1	Tenzometrické systémy a měření zatížení protetických náhrad	98
4.2	Silové poměry v lůžku protézy a jeho konstrukce	108
4.3	Myoelektrické protézy a jejich řízení	112
V.	Vybrané okruhy z biomechaniky materiálových vlastností	120
5.1	Základní mechanické vlastnosti povrchů	120
5.2	Modely biologických struktur v reologii	123
5.3	Pevnostní návrh zdravotnických pomůcek	134
VI.	Použitá a doporučená literatura	148

I. Úvod

V biomedicínském inženýrství se setkáváme s vědním oborem nazvaným biomechanika. Definování vědního oboru biomechanika je však problematické. Důvodem je především rozdíl v chápání pojmu „biomechanika“ různými lidmi. Z toho vyplývá, že pojem „biomechanika“ bude chápat jinak lékař, jinak paleontolog a jinak softwarový vývojář pro 3D grafické aplikace, pokud se problematice věnují. Obecně platí definice, že jde o „nauku o struktuře a mechanickém chování živých organismů“.

Biomechanika tedy kombinuje znalosti z funkční anatomie, fyziologie, mechaniky a dalších vědních oborů, pomocí kterých mapuje mechanickou strukturu mechanické chování a mechanické vlastnosti živých organismů, jejich částí, a mechanické interakce mezi nimi a okolím. Zjednodušeně tedy můžeme říci, že je náplní biomechaniky *studium mechanických pohybů, jejich příčin a důsledků v biosystému jako celku a v jeho jednotlivých částech*, přičemž tato konkrétní definice odpovídá definicím uváděným v anglosaské literatuře.



Jako každý obor, i biomechaniku lze rozdělit na teoretickou a experimentální. **Teoretická biomechanika** se věnuje matematickým modelům modelujícím struktury, funkce a vlastnosti zkoumaných biosystémů. Sem patří právě matematicko-mechanické modely, jež modelují určitý biomechanický systém a simulují jeho funkci. Dále sem patří modely fyzikálně-mechanických vlastností, strukturální modely a modely funkcí. Naopak, **experimentální biomechanika** se věnuje studiu reálných experimentálních modelů resp. reálných subjektů/objektů, na kterých studujeme určitý biomechanický proces. Úkolem tohoto procesu je ověřit teoretické předpoklady týkající se struktury, funkce nebo účelu biomechanického objektu jako celku nebo jeho části, ověřit správnost a přesnost řešení abstraktních matematických modelů a zkoumat dílčí biomechanické problémy, které nejsou jinak dostupné. Vzhledem k tomu, že experimentální biomechanika ověřuje teoretické poznatky a teoretická biomechanika využívá poznatků zjištěných experimentálně, lze říci, že se jedná pouze o abstraktní, ale praktické rozdělení. Pojem experimentální biomechanika nám však umožní, aby obsahem těchto skript byla především problematika vztahující se k získávání a zpracování dat z reálných měření na reálných subjektech/objektech, [3, 18].

S ohledem na velikosti studovaných modelů resp. objektů lze biomechaniku dále dělit na mikrobiomechaniku a makrobiomechaniku. **Mikrobiomechanika** je charakteristická mikroskopickým přístupem ke struktuře a chování sledovaného objektu, kdy uvažujeme rozlišovací úroveň na jednotlivé buňky a buněčné komplexy, dodejme, že se dnes můžeme setkat již s pojmem **nanobiomechanika**, jenž shrnuje oblasti biomechaniky týkající se studia na úrovni nanorozměrů. Častěji se v praxi, i těchto skriptech, setkáme s makrobiomechanikou. Pro **makrobiomechaniku** je charakteristický makroskopický přístup ke struktuře a chování organismu, kdy rozlišovací úroveň rozeznává orgány, orgánové struktury a jejich vzájemnou mechanickou interakci, či dokonce uvažujeme pro studium organismu jako celku, [3, 18].

Vzhledem k tomu, že je biomechanika transdisciplinární obor, jenž nachází uplatnění v řadě aplikačních směrů (klinické lékařské obory, technické obory, společenské obory, přírodní vědy, historické vědy, atd.), často se dělí dle oborů aplikace na **forezní biomechaniku, biomechaniku ergonomie, ortopedickou biomechaniku, biomechaniku svalově kosterního systému, klinickou biomechaniku, biomechaniku biomateriálů**, atd., přičemž se tyto oblasti téměř vždy vzájemně

překrývají. Důležité však je pro experimentální biomechaniku, že může najít široké uplatnění, a to nejen ve všech zmíněných aplikačních směrech, [3, 18].

V experimentální biomechanice lze obecně rozdělit metody měření na *metody přímé*, při kterých získáváme data přímým měřením, a *metody nepřímé*, při kterých data získáváme zprostředkovaně např. následnými výpočty. Dalším kritériem dělení experimentální biomechaniky může být dělení na *metody invazivní* a *neinvazivní*. Metody invazivní omezují či obtěžují sledovaný subjekt a metody neinvazivní umožňují získat data bez omezujícího vlivu na subjekt, [3, 18].

Cílem těchto skript je tedy ukázat na vybraných problémech základní metody a postupy v experimentální biomechanice, včetně teoretického základu pro další studium, nikoliv se věnovat obecně známým či konkrétnějším vědeckotechnickým problémům, jejichž znalost je předpokládána nebo naopak již přesahuje svou úroveň pouhý výklad metod popsaných na vybraných základních úlohách vyučovaných v Laboratoři biomechaniky na FBMI ČVUT.

Pro další studium jsou doporučeny tyto vybrané, v roce 2011 periodicky vydávané a mezinárodně uznávané, časopisy:

Chorvatsko:

- Kinesiology

Itálie:

- Journal of Applied Biomaterials and Biomechanics

Německo:

- Biomechanics and Modeling in Mechanobiology

Nizozemí:

- Human Movement Science
- Journal of Biomechanics
- Clinical Biomechanics
- Journal of Electromyography and Kinesiology
- Gait and Posture

Polsko:

- Acta of Bioengineering and Biomechanics
- Human Movement
- Journal of Human Kinetics

USA:

- Journal of Applied Biomechanics
- Movement Disorders
- Research in Social Movements, Conflicts and Change
- Body, Movement and Dance in Psychotherapy
- Clinical Kinesiology

Velká Británie:

- Applied Bionics and Biomechanics
- Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering
- Sports Biomechanics

II. Vybrané části z biomechaniky pohybu

2.1 Inerciální systémy a studium kinematiky a dynamiky

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete vzájemnou maximální flexi/extenzi segmentů horní či dolní končetiny pomocí dvou inerciálních systémů.
- 2) Identifikujte varozitu nebo valgozitu nohou.
- 3) Určete přibližnou velikost zatížení obratle při doskoku.
- 4) Naleznete velikost zatížení vybraných částí nohou při chůzi či skoku a přibližnou velikost tlaku na podložku při došlapu.
- 5) Určete velikosti zrychlení ruky a předloktí, porovnejte a stanovte velikost síly v zápěstí při úderu.
- 6) Určete přibližnou velikost tlaku při úderu.

Teoretický základ řešených úloh

Při studiu pohybu nás zajímají kinematické veličiny translačního a rotačního pohybu. Inerciální systémy poskytují informaci o kinematických veličinách (poloha, rychlost, zrychlení) díky umístění senzorů přímo na sledovaný objekt. Inerciální systém se obvykle skládá z měřící jednotky obsahující akcelerometry a gyroskopy (popř. také magnetometry), a z mikropočítače, který vyhodnocuje data z měřící jednotky. Zrychlení pohybu, resp. sílu vznikající při změnách rychlosti pohybujícího se předmětu, a gravitační zrychlení, resp. sílu vzniklou působením gravitace Země, zaznamenávají akcelerometry. Výpočtové operace v akcelerometrickém senzoru jsou založeny na Newtonově pohybovém zákonu, který nám říká, že vyprodukovaná síla je přímo úměrná zrychlení tělesa.

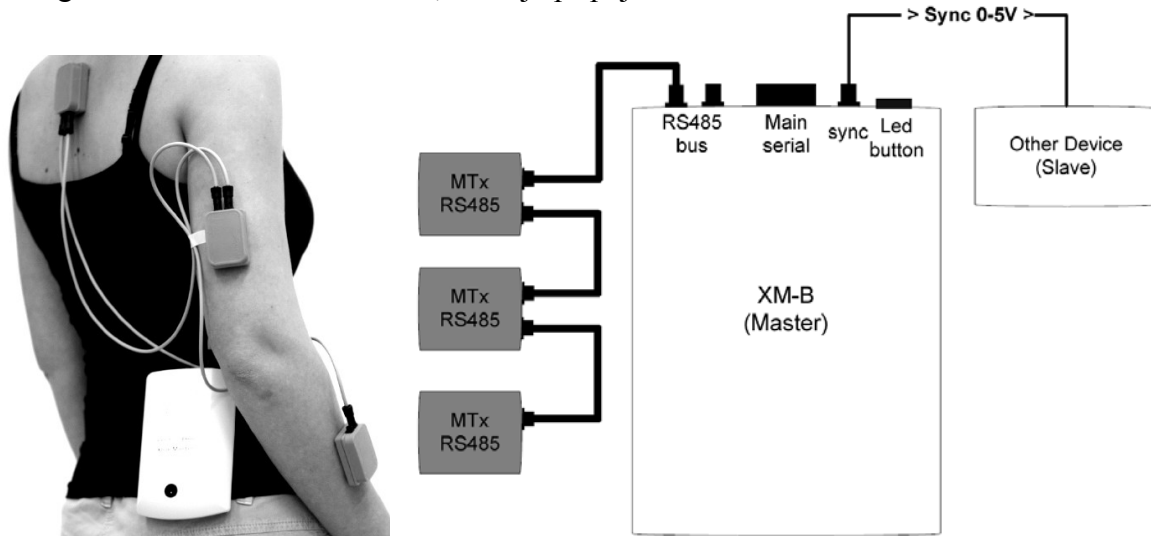
Pro účel identifikace polohy/pohybu měřeného objektu v předem definovaném souřadnicovém systému je nezbytné dodržení polohy/pohybu inerciálního systému ve směru zrychlení objektu. Což je prakticky nemožné, a proto se používají pro zjištění rotačního pohybu, tj. náklonu, gyroskopy. Vzhledem k tomu, že každý volný objekt v prostoru má šest stupňů volnosti (vnitřní vzájemně nezávislé proměnné), tak se obvykle inerciální navigační systém skládá ze tří gyroskopů a tří akcelerometrů, kde každá dvojice (gyroskop, akcelerometr) je schopna zaznamenat rotaci či zrychlení ve směru jedné osy kolmé na ostatní. Z šesti stupňů to jsou tři lineární stupně volnosti a to posun v ose x , y a z – ty udávají polohu (občas se používá synonymum „pozice“) objektu a tři stupně volnosti rotace a to otočení kolem osy x , y a z (α , β , γ) – ty udávají orientaci (občas se používá synonymum „poloha“) objektu. Pokud je známo těchto šest proměnných, je známá i poloha objektu. Jsou-li tyto údaje sledovány po jistou dobu, je z nich možné určit dráhu a rychlost pohybu objektu v rámci námi definovaného souřadného systému.



Obr.1: Jednoduchý jednoosý a tříosý akcelerometr firmy Vernier, (převzato z návodů k přístrojům Vernier).

Akcelerometry mohou být jednoosé, dvouosé nebo tříosé. Výstupem z akcelerometru je informace o akceleraci ve směru os akcelerometru, a to pro jeden, dva či tři směry pohybu, obr.1. Složitější

jsou systémy obsahující také gyroskopy. Takovýmto systémem je systém Xbus Kit. Systém Xbus Kit měření polohy segmentů těla od firmy Xsens obsahuje inerciální snímače polohy série Xsens MTi, které jsou složeny z 3D akcelerometru, gyroskopu a magnetometru. Výstupními daty ze snímače jsou informace o orientaci snímače v prostoru, akceleraci ve směru souřadného systému snímače a poloze snímače vůči magnetickému poli. Pro sběr dat a napájení snímačů obsahuje systém digitální Xbus datovou sběrnici, která je připojena k PC.



Obr.2: Motion capture systém firmy Xsens založený na inerciálních snímačích polohy, (převzato z návodu k použití MoCap systému firmy Xsens).

Obvykle měření zahájíme tak, že na vhodné anatomické body segmentů těla umístíme senzory. Měřená osoba následně zaujme výchozí polohu a provede požadovaný pohyb, během kterého jsou zaznamenávána data ze senzorů. Analýzou dat zjistíme změny polohy senzorů v prostoru, které odpovídají změnám polohy segmentů těla, na kterých jsou jednotlivé senzory umístěny. Inerciální systémy v biomechanice se především uplatňují ve sportovní biomechanice a rehabilitaci při studiu pohybu. Pomocí těchto systémů můžeme řešit především tyto fyzikální problémy: náklon, vibrace, rychlost a poloha v prostoru, síly.

Měření náklonu v prostoru

V biomechanice nás zajímá často pouze náklon objektů v prostoru, k jehož měření můžeme použít nejen gyroskopy, ale přímo akcelerometry. K měření náklonu stacionárních objektů je u akcelerometrických snímačů využívána paradoxně jejich největší nevýhoda v inerciálních systémech a to jejich možnost měření gravitačního zrychlení Země. K měření se využívají citlivé senzory (piezoelektrické, piezoodporové, atp.), schopné indikovat velikost tíhového zrychlení v souřadných osách akcelerometru. Z poměru gravitačního zrychlení ve dvou osách lze zjistit náklon. Pokud je tíhové zrychlení přesně v ose senzoru (svislý směr), pak je odezva senzoru maximální, pokud je senzor natočen, pak výstupní signál odpovídá tomuto natočení:

$$U_{V_{yst}} = U_{V_{yst \max}} \cdot \sin(\alpha), \quad (1)$$

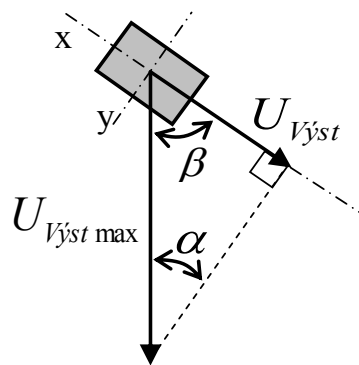
respektive

$$U_{V_{yst}} = U_{V_{yst \max}} \cdot \cos(\beta), \quad (2)$$

dle obr.3. Před vlastním měřením by měl být akcelerometr, tak jako ve všech dalších případech, kalibrován na hodnotu 0 Volt pokud na něj nepůsobí žádné zrychlení.

Pokud bychom měřili vzájemnou polohu více segmentů těla, měřili bychom jejich polohu odpovídajícím počtem akcelerometrů (např. dvou umístěných na dvou segmentech těla) a vzájemnou polohu segmentů pak určili rozdílem zjištěných úhlů v zemské souřadné soustavě, což je v našem případě zvolený absolutní souřadný systém:

$$\kappa = \alpha - \beta. \quad (3)$$



Obr.3: Využití akcelerometru k měření náklonu.

Měření vibrací

Sensory sledující kmitající objekt mohou, v závislosti na principu snímání, mít odezvu přímo odpovídající okamžité výchylce kmitajícího objektu (snímače výchylky např. indukčnostní), přímo odpovídající první derivaci okamžité výchylky kmitajícího objektu (snímače rychlosti např. elektrodynamické, dnes se používají jen zřídka) a přímo odpovídající druhé derivaci okamžité výchylky kmitajícího objektu (snímače zrychlení, tj. akcelerometry, dnes nejrozšířenější). Tímto můžeme například studovat tlumicí účinky při vývoji sportovní obuvi, v pedometrech a dalších sportovních přístrojích. Dále můžeme snímačů využít pro ergonomickou optimalizaci, jako například pro vývoj sedaček v dopravních prostředcích. Obvykle se sleduje velikost amplitudy posuvu, rychlosti, zrychlení, frekvence a doba ustálení kmitání. Odtud se hodnotí další veličiny, jako je velikost setrvačné síly, přetížení nebo deformace pohybujícího se objektu.

Určování rychlosti a pozice v prostoru

Pomocí akcelerometrů je možné realizovat zařízení, které dokáže určit pozici objektu v prostoru. Jak již bylo řečeno, překonanou vzdálenost a okamžitou polohu lze určit nepřímou. Je-li předmět v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, je zrychlení nulové. Při nabírání rychlosti je zrychlení kladné, při zastavování záporné. Z této veličiny lze určit okamžitou rychlost a z rychlosti překonanou vzdálenost. Real-time výpočet rychlosti a překonané dráhy, z akcelerometrem změřeného zrychlení v konkrétním směru, je prováděn např. jednoduchou numerickou integrací

$$v_i = a_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + v_{i-1} = a_i \cdot \Delta t + v_{i-1}, \quad (4)$$

$$x_i = v_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + x_{i-1} = v_i \cdot \Delta t + x_{i-1}, \quad (5)$$

kde x je pozice, v je rychlost, a je zrychlení, Δt je časový interval, i značí aktuální hodnotu, $i-1$ je předchozí změřená hodnota. Tato metoda se nazývá Obdélníková metoda. Snahou je, z důvodu přesnosti, aby Δt časový interval byl co nejmenší. Obecný zápis integrace pro určení vektoru okamžité rychlosti v čase t pro jeden směr je:

$$v(t) = \int_{t_0} a(t) \cdot dt + v_0, \quad (6)$$

kde v_0 je rychlost v čase počátku integrace t_0 , a je zrychlení v časovém okamžiku t . Dvojitou integrací signálu z akcelerometru lze určit překonanou vzdálenost x , kterou urazil určitý bod za danou dobu. Pro přírůstek dráhy platí vztah:

$$x(t) = \int_{t_0} v(t) \cdot dt + x_0 = \iint_{t_0} a(t) \cdot dt \cdot dt + v_0 \cdot t + x_0, \quad (7)$$

kde v je rychlost v časovém okamžiku t , x_0 je pozice v čase počátku integrace t_0 a ostatní parametry jsou stejné jako u předchozího vzorce. V programové implementaci se často využívá přesnějších numerických derivací, jedná se například o Lichoběžníkovou metodu

$$v_i = \frac{(a_i + a_{i-1})}{2} \cdot \Delta t + v_{i-1} \quad (8)$$

nebo Simpsonovou metodou:

$$v_i = \frac{\Delta t}{3} \cdot [a_i + 4 \cdot a_{i-1} + a_{i-2}] + v_{i-2} . \quad (9)$$

Obdobně by se řešilo určování dráhy, přičemž existuje celá řada dalších numerických integračních metod a jejich úprav. Integrací zrychlení ve všech třech osách lze teoreticky získat vektor okamžité rychlosti a další integrací pozici v 3D prostoru. V praxi se však u inerciálních systémů setkáváme s nepřesnostmi v detekci rychlosti a pozice z důvodu velkého Δt časového intervalu při integraci a projevem gravitačního zrychlení Země g , které nemá vztah k akceleraci měřeného objektu, a tudíž zanáší chybu do výpočtu přesné a skutečné rychlosti a pozice objektu. K eliminaci tohoto problému se používá pokročilých filtračních a kompenzačních metod.

Určování síly a tlaku

Využitím naměřených hodnot rychlostí a zrychlení lze určit, při znalosti dalších fyzikálních vlastností, odvozené veličiny, jako je například síla, vykonaná práce, atd. Například ve sportovní biomechanice nás může zajímat velikost síly při zrychleném/zpomaleném pohybu podle 2. Newtonova pohybového zákona

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} , \quad (10)$$

kde \vec{F} je zjišťovaná síla, m je hmotnost pohybujícího se tělesa, $d\vec{v}/dt$ je derivace okamžité rychlosti podle času, tedy \vec{a} - naměřené zpomalení/zrychlení ve směru účinku síly. Naměřené zrychlení může obsahovat i složku zrychlení gravitačního. Pokud nás bude zajímat hmotnost segmentů těla, která je nutná pro výpočet sil, lze ji určit na základě znalosti celkové hmotnosti a výšky jedince dvěma užívanými postupy. Méně přesný postup vychází ze znalosti procentuálního rozdělení celkové hmotnosti, publikované výsledky jednotlivých autorů se však značně liší. Přesnější je metoda založená na experimentálně stanovených koeficientech B_{0i} , B_{1i} a B_{2i} pro každý segment. Pro vyjádření hmotnosti daného segmentu pak platí vícenásobná regresní rovnice

$$m_i = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v . \quad (11)$$

Ze znalosti setrvačných sil segmentů můžeme určovat velikosti silových účinků v kloubních spojeních. Využitím znalosti o antropometrii konkrétní části těla můžeme určit například velikost síly při úderu.

$$F_{ruka} = a_{ruka} \cdot m_{ruka} , \quad (12)$$

kde F_{ruka} je hledaná síla, m_{ruka} je hmotnost pohybující se ruky a a_{ruka} je naměřené zpomalení/zrychlení ve směru účinku síly.

Pokud by nás zajímala síla v jednotlivých kloubech horní končetiny, pro reakční síly v kloubech platí

$$- F_{zapesti} = a_{ruka} \cdot m_{ruka} , \quad (13)$$

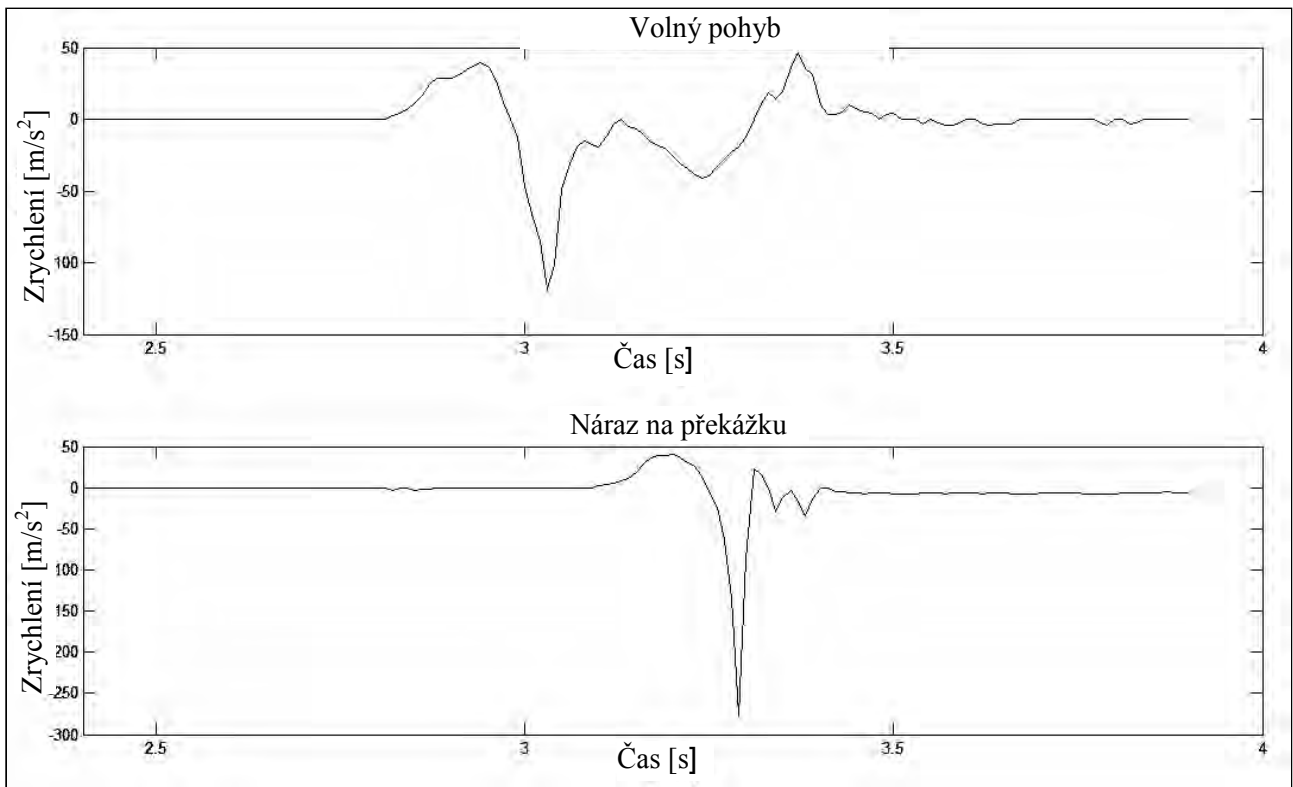
$$- F_{loket} = F_{zapesti} + a_{predlokti} \cdot m_{predlokti} , \quad (14)$$

$$- F_{rameno} = F_{loket} + a_{nadlokti} \cdot m_{nadlokti} . \quad (15)$$

Zrychlení pro jednotlivé části zjistíme měřením z jednotlivých akcelerometrických snímačů umístěných na konkrétní anatomické body segmentů těla. Ze znalosti velikosti sil můžeme pokračovat například ve výpočtu tlaku p generovaného silou působící na uvažovanou plochu S :

$$p = \frac{dF}{dS} \Rightarrow p = \frac{F}{S} . \quad (16)$$

Uvedeného předpokladu můžeme využít ve sportovní biomechanice, forenzní biomechanice atd.



Obr.4: Zrychlení/zpomalení pohybu ruky měřené akcelerometrem upevněným na ruce.

2.2 Sledovací systémy a studium kinematiky a dynamiky

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete maximální flexi/extenzi částí horní končetiny (lokte a ramene) pomocí kamerového systému.
- 2) Určete translační rychlosti a zrychlení vybraného segmentu těla, a těla jako celku, kamerovým a ultrazvukovým systémem.
- 3) Určete úhlové rychlosti a zrychlení vybraného segmentu těla, a těla jako celku, kamerovým systémem.
- 4) Zhodnoťte měřený cyklogram pohybu dolní končetiny a vydefinujte rozdíly cyklogramu pro chůzi a běh.
- 5) Určete vzájemnou polohu anatomických os hlavy a ramen pomocí kamerového systému.
- 6) Změřte oční pohyb pro několik osob při konání konkrétní shodné činnosti, graficky presentujte naměřená data o poloze oka jednotlivých osob a vydefinujte rozdíly a shody v pohybech.

Teoretický základ řešených úloh

Při studiu pohybu nás zajímají kinematické veličiny translačního a rotačního pohybu, které můžeme zjistit také pomocí tzv. sledovacích systémů. Sledovací zařízení bývá stacionární a jeho části jsou instalovány ve známých pozicích scény. Sledovacích systémů, které nám poskytují informaci o poloze sledovaného objektu v oboru biomechaniky, je celá řada, asi nejčastěji jsou používány kamerové systémy, elektromagnetické systémy či ultrazvukové systémy. Systémy se tedy liší podle technologie snímání a záznamu dat. Pro snímání pohybujících se objektů je možné použít nejjednodušších kamer, jako jsou např. webkamery, či dražší Motion Capture (MoCap) systémy, které nám přímo vyhodnotí pohyb v 3D prostoru pomocí více než jen jednoho sledovacího senzoru. Sledovací systémy rozdělujeme na „pasivní“ a „aktivní“ podle způsobu detekce markerů (také tzv. značek) umístěných na požadovaných anatomických bodech těla. Markery se musí umísťovat v souladu s metodikou doporučenou výrobcem systému nebo zavedenými standardy, z důvodu přesné detekce vzájemného pohybu segmentů těla, a následné možnosti srovnání výsledků mezi různými pracovišti. Zavedené standardy popisují rozmístění markerů, tzv. sety markerů, kterým jsou přiřazeny příslušné 3D modely svalově-kosterních systémů těla.



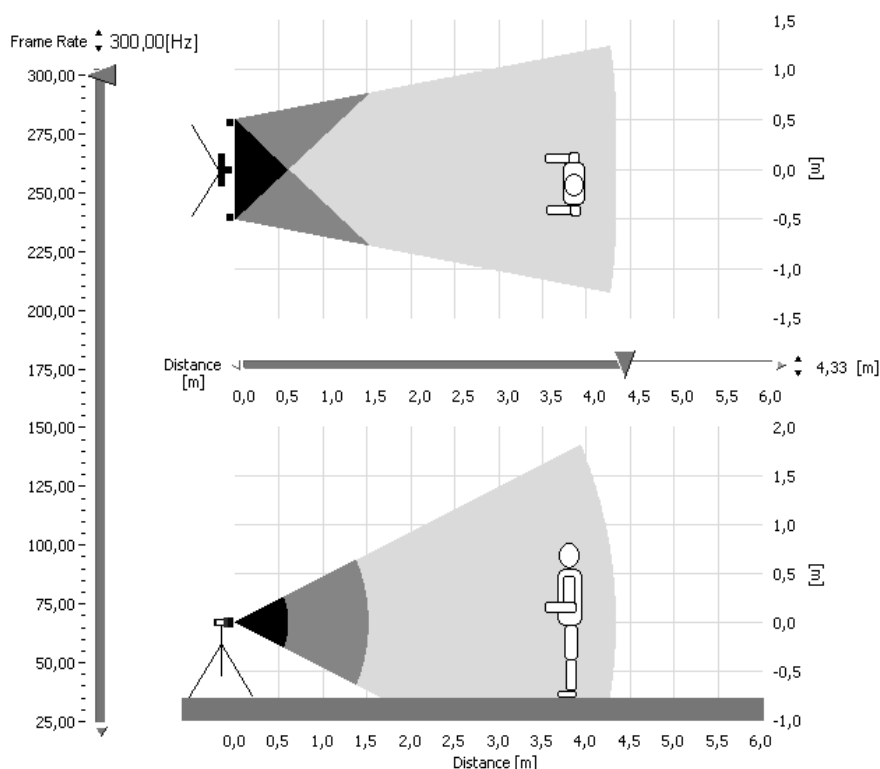
Obr.1: Příklady ultrazvukových senzorů polohy, (převzato z podkladů firmy CMA).

Příkladem moderního aktivního sledovacího kamerového systému je systém rakouské společnosti Lukotronic AS200, jehož základem je kamerová souprava, kterou tvoří infračervené kamery zabudované v kovovém rámu, který lze připevnit na stativ. Pomocí stativu je možné nastavovat výšku kamerové soupravy, tj. infračervených kamer, podle toho, která část těla má být studována. Kamerový systém může být tvořen několika kamerovými soupravami pro studium rozsáhlejších pohybů segmentů těla nebo těla jako celku. Kamery snímají pohyb pomocí aktivních markerů.

Markery jsou očíslovány pro lepší orientaci a očíslování markerů odpovídá jejich označení v ovládacím software systému. Hlavní částí každého markeru je IR LED dioda, která je napájena z dobíjecího akumulátoru. Z důvodu zachycení markeru systémem, musí být marker natočen během pohybu přímo proti kamerám a zachycen minimálně dvěma kamerami kamerové soupravy. Dosah zařízení je dán nastavitelnou vzorkovací frekvencí. Čím je vzorkovací frekvence vyšší, tím je dosah nižší a naopak. Znárodnění výšece pokrytí jednou kamerovou soupravou názorně ukazuje obr.3.



Obr.2: Kamerová souprava systém Lukotronic AS200.

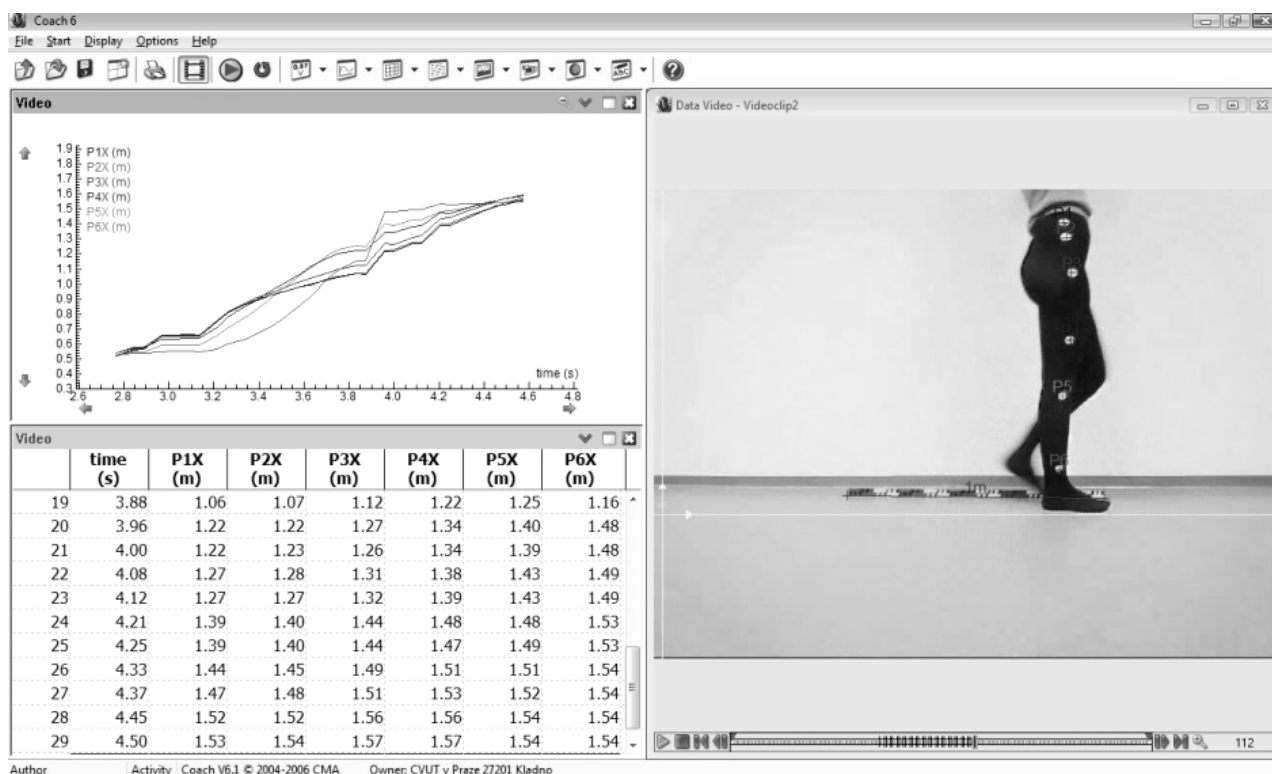


Obr.3: Schéma pokrytí prostoru kamerovou soupravou AS200, (převzato z návodu k použití kamerového systému firmy Lukotronic).

Z důvodu použití aktivních markerů a přesného vzájemného ustavení kamer kamerové soupravy v kovovém rámu není nutné systém kalibrovat, pokud chceme pohyb studovat v systémovém souřadném systému, ani brát ohled na aktuální světelné podmínky. Systém je také přenosný, což umožňuje flexibilitu použití. Kalibrace je nutná pouze v případě definování a použití jiného než systémového souřadného systému, či v případě použití více kamerových souprav pro souběžné snímání pohybu.

Všechny výše uvedené MoCap systémy nám vždy, s větší či menší přesností, poskytují informaci o poloze vybraných objektů či bodů v prostoru vzhledem k poloze k systému nebo soustavě systémů.

Jako příklad uvažujme sledování pohybu částí těla, s kterým se setkáme nejen v kinematografii, ale také v rehabilitaci či sportovní biomechanice.



Obr.4: Záznam obrazu webkamerou a analýza chůze v Coach 6 MV Studiu.

Jak je z obr.4 vidět, ze záznamu sledovacího systému získáme polohu jednotlivých markerů těla v určitých okamžicích, přičemž množství záznamů během definovaného časového úseku je dáno nastavením frekvence a dobou sledování těla systémem. Úloha měření a analýzy pohybu markerů resp. segmentů těla se řeší buď jako rovinná nebo jako třírozměrná. U úlohy dvourozměrné je možné manuální odečítání souřadnic markerů na záznamu. V případě 3D úlohy je použito stereo záznamu dvou či více senzorů (typicky kamer) od sebe vzdálených, které předávají naměřená data do počítače, proto je nutné pro vyhodnocení záznamu polohy, tj. souřadnic markerů (značek) na těle, použít vyhodnocovací software. Předpokládejme, že systém v konkrétním okamžiku zaznamená souřadnice bodu na objektu v kartézské souřadné soustavě, pro 2D úlohu je pak poloha dána hodnotami x_i , y_i . Již samotné zjištění polohy těla jako celku či jednotlivých bodů na segmentech těla se využívá například v rehabilitaci. Většinou se však, například ve sportovní biomechanice, zabýváme komplexnějším studiem kinematiky a dynamiky pohybu (rychlosti a zrychlení běžců, atd.). Naměřená data se často normalizují na konkrétní pohybovou aktivitu (např. na 100% jednoho cyklu chůze) nebo charakteristiku subjektu (např. 1kg hmotnosti pacienta) atp., z důvodu možnosti objektivnějšího a snazšího srovnání a hodnocení výsledků měření.

Význam hybnosti objektu a působících sil

Z Druhého Newtonova zákona, tzv. Zákona síly víme: „Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.“. Obecněji bývá zákon síly vyjadřován tak, že síla \vec{F} je rovna časové změně hybnosti \vec{p} , což lze matematicky vyjádřit jako

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (1)$$

Původní atomistické představy předpokládaly, že nejmenší částice hmoty, z nichž se skládají tělesa, jsou dále nedělitelné a jejich vlastnosti se nemění. Tento předpoklad lze při makroskopických pohybech obvykle považovat za platný, což nám dovoluje přejít k původní formulaci zákona síly:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (2)$$

kde \vec{F} je síla, m je hmotnost tělesa, \vec{a} je zrychlení. Pokud si uvědomíme, že zrychlení je derivace rychlosti neboli druhá derivace polohy, lze zákon síly použít k sestavení pohybové rovnice

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}, \quad (3)$$

kteřá umožňuje řešit konkrétní pohybové děje (určovat polohu a rychlost těles v závislosti na čase), jsou-li známy konkrétní síly působící při dějích a hmotnosti těles. Takováto úloha dynamiky se nazývá „přímá úloha“, neboť jsou známy silové účinky a vyšetřuje se pohyb dynamické soustavy. Opakem přímé úlohy je „inverzní úloha“, neboť je znám pohyb soustavy (zjištěný např. MoCap systémy) a vyšetřují se silové účinky a reakce s okolím.

Určování rychlosti a zrychlení v prostoru

Pokud předpokládáme pohyb tělesa přímočarý, tzn. trajektorií pohybu je přímka, pak tento pohyb můžeme rozdělit na rovnoměrný přímočarý a nerovnoměrný přímočarý pohyb. Rovnoměrný přímočarý pohyb je pohyb po přímce se stálou rychlostí. Pokud přímočarý pohyb není rovnoměrný, označuje se jako nerovnoměrný přímočarý pohyb, což je pohyb s proměnnou rychlostí. Dráha rovnoměrného přímočarého pohybu je určena vztahem

$$s = v \cdot t + s_0, \quad (4)$$

kde v je rychlost, t je čas, s_0 je počáteční dráha (dráha v čase $t = 0$), je-li $s_0 = 0$, pak

$$s = v \cdot t \quad (5)$$

Pro rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu ($v = \text{konst.}$) píšeme

$$v = \frac{s - s_0}{t}, \quad (6)$$

zrychlení rovnoměrného přímočarého pohybu je $a = 0$. Podle Newtonova zákona víme, že na těleso, které se pohybuje rovnoměrně přímočaře, nepůsobí žádná síla.

Nyní předpokládejme pohyb tělesa rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem, u kterého směr i velikost zrychlení zůstává konstantní, trajektorií je přímka nebo část přímky a velikost rychlosti se mění přímo úměrně s časem. Směr rychlosti se nemění. Jestliže je zrychlení kladné, pak se rychlost zvyšuje a jedná se o zrychlený pohyb, jestliže je zrychlení záporné, pak se rychlost snižuje a jedná se o pohyb zpomalený.

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb, kdy rychlost roste lineárně, určíme průměrnou rychlost

$$v_p = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + a \cdot t)}{2} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2}, \quad (7)$$

kteřá je aritmetickým průměrem okamžitých rychlostí na začátku a na konci uvažované dráhy. Překonaná dráha je tedy určena vztahem

$$s = s_0 + v_p \cdot t = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad (8)$$

kde a je zrychlení, v_0 je počáteční rychlost (rychlost v čase $t = 0$), s_0 je počáteční dráha (dráha v čase $t = 0$), t je čas.

Předpokládejme, že frekvence snímání polohy bodu v prostoru daným sledovacím systémem nám definuje časový krok Δt . Real-time výpočet rychlosti a zrychlení ze znalosti překonané dráhy, která je dána rozdílem souřadnic polohy v konkrétním směru ve dvou různých časových okamžicích záznamu, je prováděn například jednoduše metodou zpětné numerické derivace

$$v_x = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (9)$$

$$a_x = \frac{v_{x,i} - v_{x,i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad (10)$$

kde a je okamžité zrychlení, v je rychlost, t je čas, i značí aktuální hodnotu, $i-1$ je předchozí zaznamenaná hodnota. V případě, že jsou časové body ekvidistantní, pak lze například tři body proložit parabolou a odvodit aproximaci derivace pro offline analýzu záznamu:

$$v_x = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \cdot \Delta t}, \quad (11)$$

pro stejné tři body lze také odvodit vzorec pro odhad druhé derivace

$$a_x = \frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}. \quad (12)$$

Identickým způsobem by se určovala rychlost a zrychlení pro zbývající směr y , a pro 3D úlohu i směr z .

Určování náklonu segmentů těla v prostoru

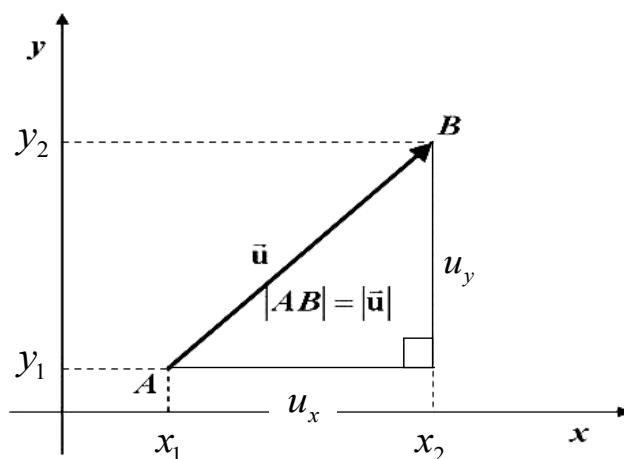
Zatím jsme se zabývali analýzou polohy a pohybu jednoho bodu identifikovaného na sledovaném objektu. Pokud však sledujeme více bodů, můžeme vytvořit drátový model a sledovat vzájemnou polohu jednotlivých bodů vůči sobě v kartézské souřadné soustavě. Tohoto můžeme využít například při sledování polohy objektu definovaného dvěma body. Může se jednat například o segmenty dolní končetiny při studiu chůze. Značky se pak často umísťují na začátek a konec segmentu těla v místech kloubního spojení. Poloha značek definuje úhel natočení segmentu v souřadném systému. Z dvou identifikovaných bodů můžeme definovat vektor, tj. stačí znát souřadnice dvou markerů v prostoru. Například pro 2D úlohu vypočítáme složky vektoru v příslušných osách pomocí rozdílu souřadnic obou bodů v dané ose:

$$u_x = x_1 - x_2, \quad (13)$$

$$u_y = y_1 - y_2. \quad (14)$$

Výsledný vektor je pak

$$\vec{u} = (u_x, u_y). \quad (15)$$



Obr.5: Určení vektoru z dvou bodů.

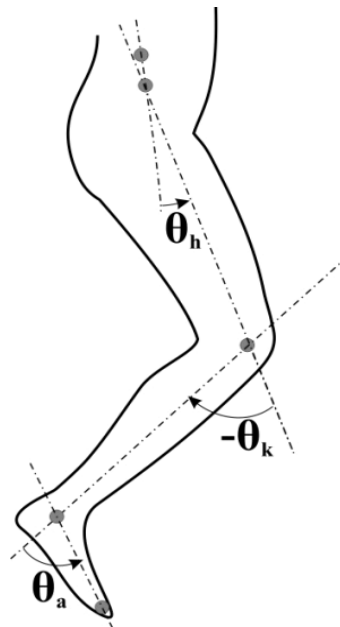
Pokud nás zajímá poloha segmentu ve zvolené kartézské souřadné soustavě (absolutním souřadném systému), pak necht' vektor vztažné horizontály je $\vec{v} = (v_x, v_y) = (1, 0)$ a odtud úhel natočení segmentu vůči horizontálnímu směru okolního prostoru:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right). \quad (16)$$

Pokud by nás zajímalo vzájemné natočení dvou segmentů, přičemž by každý byl definován vlastním vektorem, pak je výpočet identický. Identicky by se také řešila 3D úloha s rozšířením o z souřadnici:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{u_{x1} \cdot u_{x2} + u_{y1} \cdot u_{y2} + u_{z1} \cdot u_{z2}}{\sqrt{u_{x1}^2 + u_{y1}^2 + u_{z1}^2} \cdot \sqrt{u_{x2}^2 + u_{y2}^2 + u_{z2}^2}}\right), \quad (17)$$

kde \vec{u}_1 a \vec{u}_2 jsou vektory definující polohu dvou libovolných segmentů a θ je úhel mezi nimi.



Obr.6: Ilustrace úhlů mezi segmenty dolní končetiny.

Pokud vyhodnotíme velikosti změn natočení segmentů v určitém časovém intervalu, můžeme určit další charakteristiky rotačního pohybu, např. pomocí numerické derivace, jako je úhlová rychlost (ω) a úhlové zrychlení (ε), ve 2D platí (a analogicky bude odpovídat i pro 3D):

$$\omega = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}, \quad (18)$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (19)$$

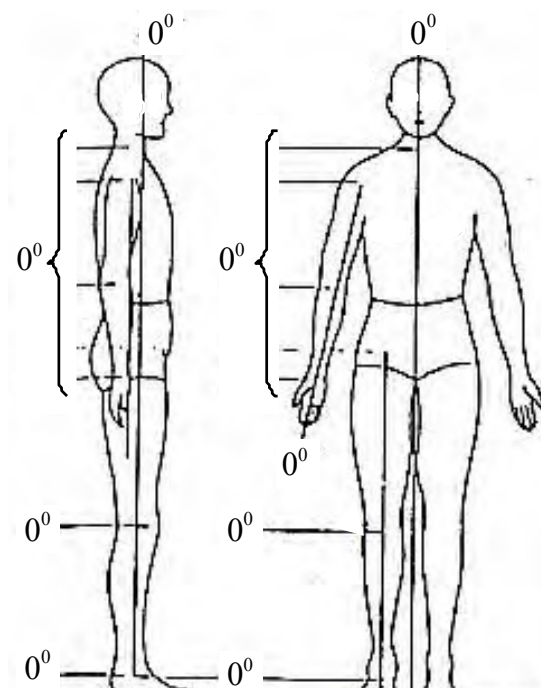
Tyto veličiny také můžeme určit přímo z již vypočtených veličin pro translační pohyb při znalosti vzdálenosti značek, tj. délky segmentu, např.

$$\varepsilon = \frac{a_{y,i} - a_{y,i-1}}{|\vec{u}| \cdot \cos \alpha_i} - \frac{a_{x,i} - a_{x,i-1}}{|\vec{u}| \cdot \sin \alpha_i}. \quad (20)$$

Pokud známe úhlové rychlosti a zrychlení jednotlivých segmentů v souřadném systému, z rozdílů hodnot těchto veličin různých segmentů můžeme určit vzájemné úhlové rychlosti či zrychlení pohybujících se segmentů vůči sobě, např. holenní a stehenní části v kolenním kloubu.

Hodnocení pohyblivosti segmentů těla

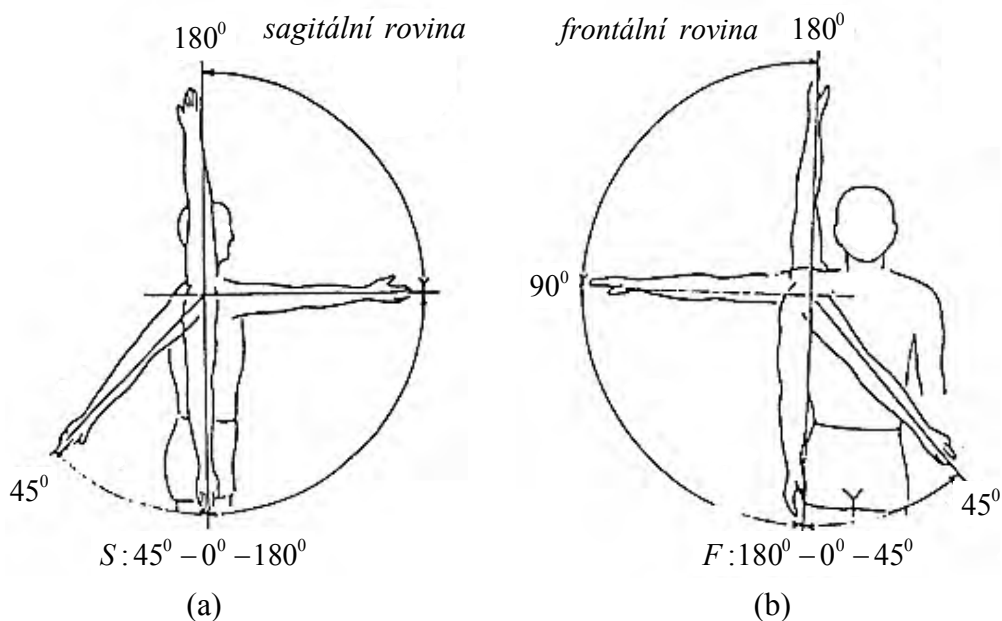
Pohyblivost soustavy segmentů a rozsah pohyblivosti je dán vzájemnými vazbami segmentů, tj. kinematickými dvojicemi a jejich vzájemnou pohyblivostí, a dále konfigurací celé soustavy, tj. kinematickým řetězcem. Pohyblivost vyjadřuje stupeň volnosti, který je dán počtem nezávislých proměnných ve vztažném systému, které potřebujeme k jednoznačnému určení polohy bodu v tomto vztažném systému. V mechanice se za stupně volnosti označují základní osy posunu a osy otáčení, podél kterých se segment může pohybovat a otáčet. Rozsah pohyblivosti dílčích stupňů volnosti je vymezen intraartikulárními a extraartikulárními komponentami. V ploše má těleso tři stupně volnosti (posun podél osy x , osy y a otočení v rovině x - y , tj. kolem osy z). V prostoru má těleso šest stupňů volnosti (posun podél osy x , osy y , osy z a otočení kolem osy x , osy y , osy z).



Obr.7: Základní nulové postavení pacienta, [23].

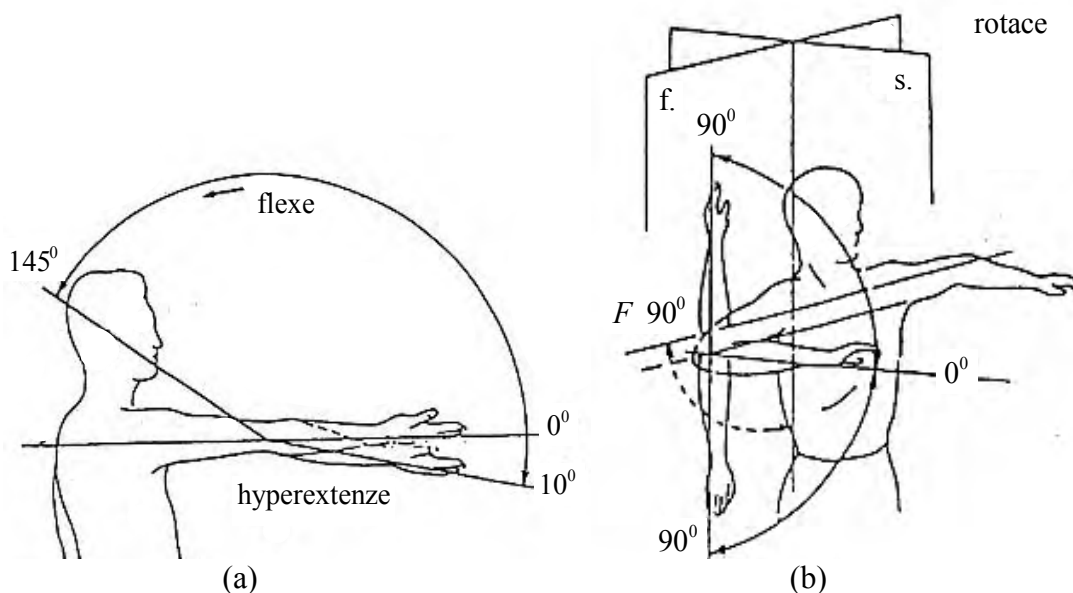
Nyní si ukážeme příklad využití sledovacích, popř. inerciálních, systémů k vyšetření hybného systému, tj. hybnosti kloubů horní končetiny. K měření se často používá metoda SFTR (S – sagitální rovina, F – frontální rovina, T – transversální rovina, R – rotace). Metoda SFTR zahrnuje měření a zaznamenávání pohybu v kloubu. Tato metoda se stala základem ortopedického měření kloubní pohyblivosti. Představuje standardní metodu pro měření pohybů v jednotlivých kloubech. V praxi metoda SFTR využívá pro měření např. speciálního úhloměru, přičemž měření úhlů probíhá v každé rovině jednotlivě. Výsledek měření je vždy ovlivňován držením těla měřené osoby, proto se výsledky u stejné osoby mohou nepatrně lišit.

Kompletnějším testem lze získat nejen hodnoty úhlů pohyblivosti kloubů končetiny, ale i informace o délce končetin, velikosti obvodu končetin atp. Goniometrický záznam metodou SFTR tedy zahrnuje analýzu vykonaného komplexního pohybu. Na začátku měření je nutné dodržet základní postavení těla tzv. nulové postavení, obr.7. Nulové postavení je vzpřímený stoj zdravého člověka, kde hlava je držena tak, aby pohled očí byl vodorovný, směřující k protější straně místnosti. Hrudník je ve středním postavení mezi vdechem a výdechem. Břišní svaly jsou napjaté. Horní končetiny jsou volně připaženy k tělu s dlaněmi natočenými směrem dopředu. Kolena jsou natažená a chodidla jsou vedle sebe, kde se dotýkají patami a palci.



Obr.8: Zobrazení rotace ramene v sagitální (a) a ve frontální rovině (b), [23].

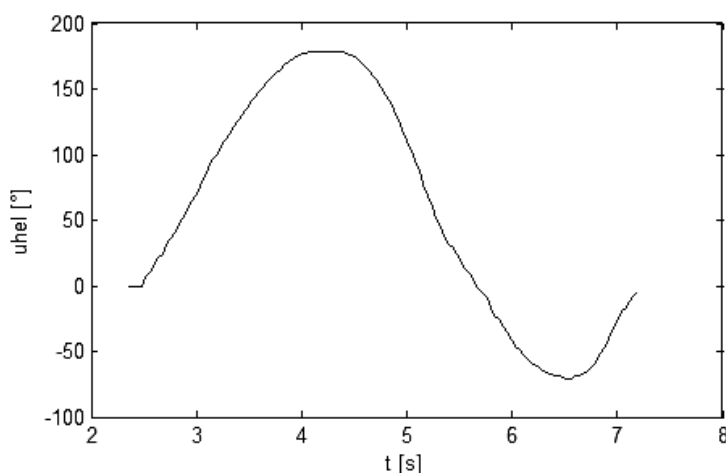
Z uvedeného vzpřímeného stoje vychází pohyby mimo jiné pro měření horní končetiny. Měření se obvykle provádí pro ramenní a loketní kloub v rovině sagitální a frontální. Pohyb ruky nemusí být měřen v transverzální rovině, neboť pro daná měření jsou dostačující informace z roviny sagitální a frontální. Rozsahy pohybů pro rotaci v rameni jsou uvedeny na obr.8 (a, b). Rozsahy pohybů v loktech jsou uvedeny na obr.9 (a, b). Rozsahy pohybů uvedených na obr.8 a obr.9 slouží k zhodnocení výsledků měření, které jsou zjištěny sledovacími či inerciálními systémy. Sledujeme zejména změny úhlů při pohybu a plynulost pohybu.



Obr.9: Zobrazení pohybu lokte v sagitální (a) a ve frontální rovině (b), [23].

Způsob měření ukažme na příkladu měření rotace ramene a pohybu lokte ve frontální a sagitální rovině: Jsou sledovány koncové úhly pohybu svírané paží od výchozího nulového postavení. Měření se zapisuje dle ortopedických standardů, ve kterých se nejprve uvádí první koncový úhel získaný pohybem paže či ruky od nulového postavení (extenze, abdukce,...) – nulové postavení (0°) – druhý koncový úhel získaný také pohybem paže či ruky od nulového postavení (flexe, addukce,...). Následně jsou posuzovány maximální hodnoty úhlů, kterých kloub v daném směru může dosáhnout. Další informací z měření je celkový úhel, který vznikl sečtením koncových úhlů.

Celkový úhel určí, zda odchylka naměřených a referenčních hodnot je způsobena špatným vyjádřením nulového postavení nebo zda změřená odchylka byla způsobena pohybovým systémem měřené osoby. Celkový součet úhlů se uvádí v závorce za zápisem hodnot. Příklad měření rotace ramene MoCap systémem v sagitální rovině je uveden v Grafu 1.



Graf 1: Příklad grafu závislosti úhlu rotace ramene na čase v sagitální rovině.

Pohyb: Extenze – 0 – Flexe

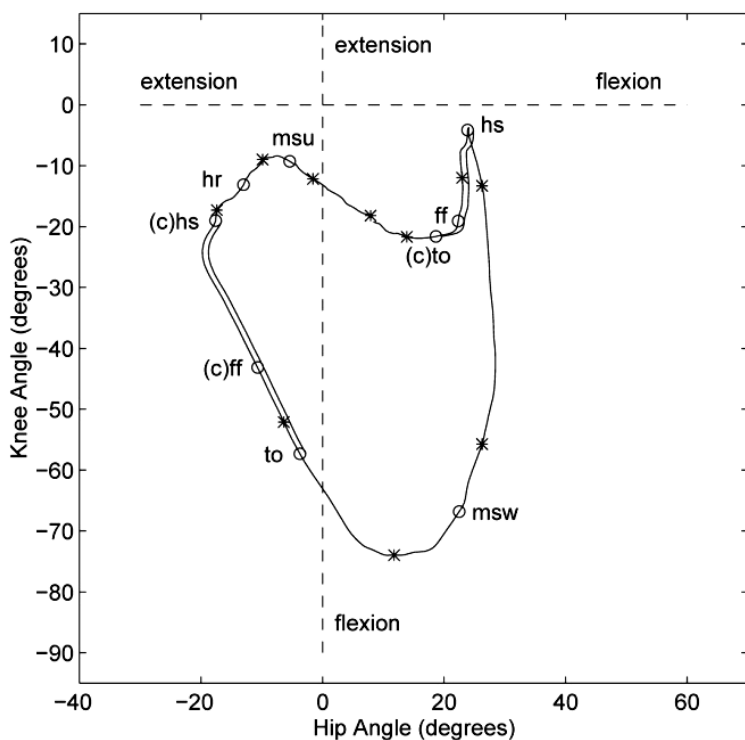
Referenční hodnoty: $180^\circ - 0^\circ - 45^\circ$ (225°)

Naměřené hodnoty: $178^\circ - 0^\circ - 71^\circ$ (249°)

Porovnáním referenčních a naměřených hodnot úhlů ze vzorového měření rotace ramene v sagitální rovině je zřejmé, že naměřená hodnota flexe přesahuje hodnotu 45° . Součet naměřených úhlů v závorce naznačuje, že došlo k zvětšení celkového úhlu. Obdobně bychom mohli rotaci ramene ve frontální rovině, tj. pohyb: Abdukce – 0 – Addukce; pohyb lokte v sagitální rovině, tj. pohyb: Hyperextenze (není pravidlem) – 0 – Flexe; pohyb lokte ve frontální rovině, tj. pohyb: Zevní rotace – 0 – Vnitřní rotace při abdukovaném rameni (loket v 90° flexi), atp.

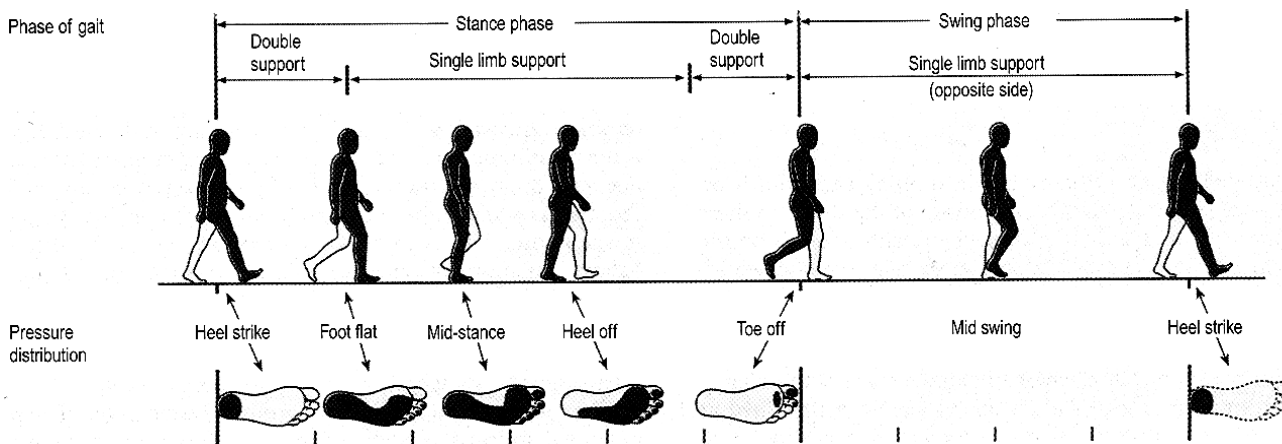
Studium pohybu cyklogramy

Mimo zmíněné a velmi často používané grafy časových závislostí kinematických (či dynamických) veličin se k popisu pohybu segmentů těla také používají tzv. cyklogramy (také tzv. angle-angle diagrams), kterých především v problematice studia chůze existuje několik typů. Základním je graf závislosti úhlu v kyčli na úhlu v kolenu. Jelikož chůze člověka je svým způsobem periodická, získáváme opakující se obrazec s drobnými odchylkami, který nám poslouží k dalšímu popisu pohybu končetiny. Kompletní cyklus chůze, Graf 2, je rozdělen do 10 časově přibližně stejných úseků, které jsou v cyklogramu označeny znakem “*“. Důležité události v cyklu chůze jsou v cyklogramu vyznačeny znakem “o“, společně s odpovídajícím krátkým popisem, Graf 2. Úsek grafu po dotyku paty s podložkou (hs = heel-strike) je reprezentován téměř vertikální přímkou charakterizující rychlou flexi (ohyb) kolene a malý pohyb kyčle. Po dotyku plochy chodidla nohy (ff = foot-flat) začíná pohyb kyčle společně s kolenem, který je vyobrazen nakloněnou přímkou spojující „ff“ a „msu“ (mid-support). Časový úsek mezi „hs“ a „(c)to“ je nazýván „loading phase“ (zatěžovací fáze) a tvoří okolo 10-12% cyklu chůze. Následuje úsek grafu „weight-bearing phase“ (nosná fáze), po kterém dochází ke zvedání paty z podložky „hr“. V bodě „to“ je proveden odval palce a noha se po té již nedotýká podložky. Ve chvíli, kdy je koleno ohnuto (flexe) a končetina se nachází nad podložkou, pohyb končetiny přechází do švihové fáze. Švihová fáze obvykle začíná při úhlu 0° v kyčli a ve flexi kolene dosahující asi 80 % svého maxima.



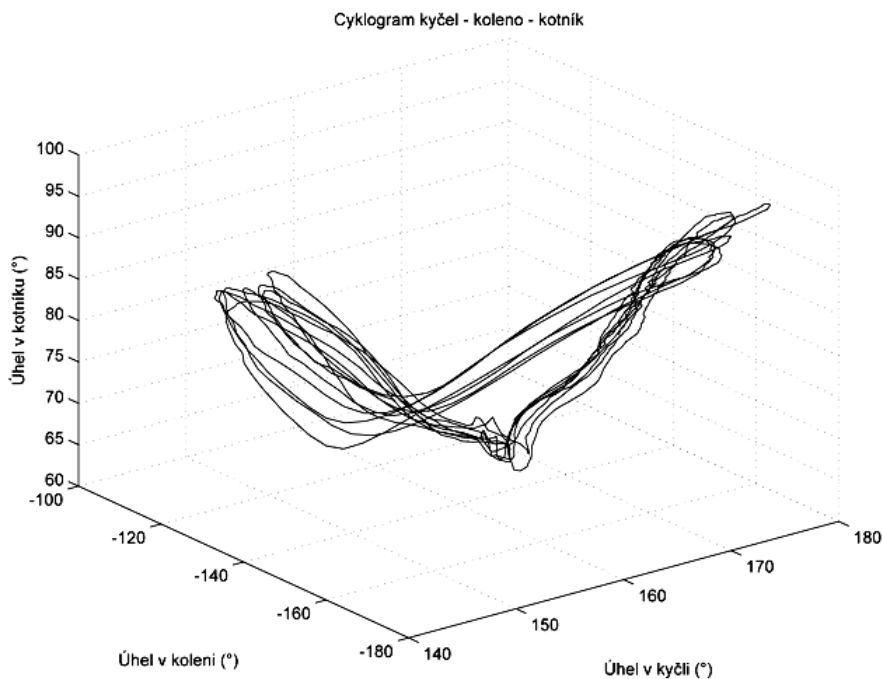
hs = heel-strike (dotyk paty s podložkou),
 ff = foot-flat (chodilo v dotyku s podložkou),
 to = toe-off (odval palce po podložce),
 msu = mid-support (střed oporné fáze),
 hr = heel-rise (zvedání paty z podložky),
 msw = mid-swing (střed švihové fáze),
 (c) = contralateral (označení stavů na opačné (kontralaterální) straně těla).

Graf 2: Typický cyklogram pro kyčel a koleno, [10, 22].



Obr.10: Grafické znázornění pohybu v oporné i švihové fázi, [4, 10].

Uvedeným způsobem prezentace úhlů může jednoduše a velmi rychle například fyzioterapeut usoudit o nedostatečné flexi atp. Z grafů také můžeme určit, o jaký způsob chůze se jedná (pomalá chůze, běh, atd.) a zdali se liší od normálu. V grafu 3 je vynesena závislost úhlů všech tří kloubů dolní končetiny během chůze. Cyklogramy mohou také zobrazovat závislosti úhlů segmentů levé a pravé dolní končetiny, které nás informují o symetrii chůze. Existují také cyklogramy zobrazující závislosti úhlových rychlostí a úhlových zrychlení ve vybraných kloubech končetin.



Graf 3: Příklad třídimenzionálního cyklogramu chůze.

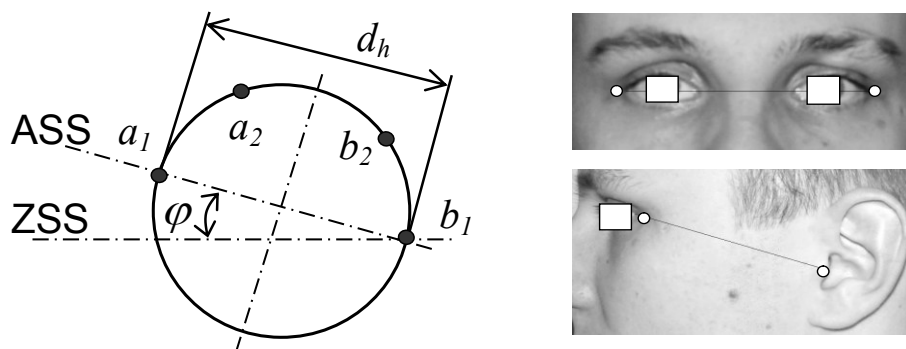
Hodnocení polohy hlavy a ramen

V medicínské praxi se setkáváme s analýzou poloh všech segmentů těla, v souladu s požadavky lékařů. Časté je, mimo zmíněné hodnocení poloh končetin, také například hodnocení držení trupu, hlavy, ramen, ale také očí. Následujícím příkladem analýzy poloh dalších částí těla bude právě analýza polohy hlavy, ramen a očí.

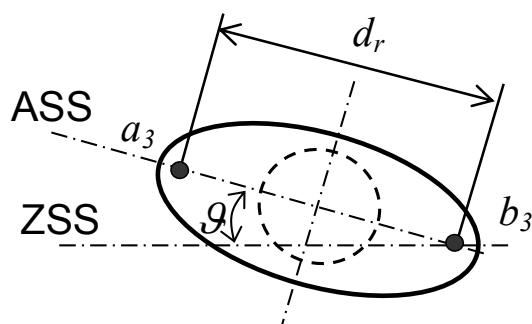
Koordinace pohybů hlavy, ramen a očí, tedy interakce okulomotorického a cephalomotorického systému, je nezbytná například ke stabilizaci obrazu na sítnici při volním pohybu hlavy nebo při současném pohybu hlavy a očí za účelem změny pohledu. Z uvedeného vyplývá potřeba měření a hodnocení polohy hlavy, tj. určení hodnot inklinace (úklon do strany), flexe či extenze (předozadní náklon) a rotace hlavy v prostoru. Poloha ramen bude určena inklinací a rotací v třídimenzionálním prostoru. Aby bylo možné hodnoty inklinace, flexe a rotace vyčíslit v případě pohybu hlavy a ramen, je nutné zavést dvojí systém os. Systém pevně vázaný na polohu konkrétního segmentu nazýváme anatomický systém os (či anatomický souřadný systém - ASS). Úsloví „anatomický systém“ určuje, že tento systém musí být jednoznačně určen anatomickými znaky na segmentu těla. Jednoznačné určení takového systému představuje problém sám o sobě, neboť systém je třeba definovat nejen tak, aby byl vždy jednoznačně a opakovatelně určitelný v případě jednoho subjektu, ale zároveň i tak, aby vykazoval co nejmenší odchylku interindividuální. V případě měření polohy hlavy znamená určení anatomického systému os definování anatomické horizontály při pohledu zředu a z profilu. Vztažnou horizontálou pak budiž horizontála okolního prostoru, tj. taková, která je kolmá na vektor tíhového zrychlení Země, a definuje zemský souřadný systém (ZSS). Při určování anatomické horizontály se vychází například z definice takzvané Frankfurtské horizontály. Ta je v literatuře popisována jako spojnice chrupavčitého výběžku ušního boltce (tragus), tj. horního okraje zevního zvukovodu, a spodního okraje orbity (očnice). Na obr.11 jsou ušní boltce značeny a_1 a b_1 a okraje očnic značeny a_2 a b_2 . Rozměr d_h je průměr hlavy nebo přesněji řečeno vzdálenost levý tragus – pravý tragus. Průměr hlavy je možné měřit pomocí pelvimetru. Úhel rotace hlavy φ je definován natočením anatomické horizontály, tj. spojnicí uvedených anatomických bodů, vůči mediální resp. frontální rovině měřeného subjektu, obr.11. Obdobně jsou určovány také úhly flexe/extenze a inklinace hlavy v rámci zemského souřadného systému, který je definován tíhovým zrychlením Země.

V případě určování inklinace a rotace ramen je obvykle anatomická osa ramen určena levým a pravým nadpažkem (akromionem), resp. spojnicí mezi těmito výstupky, které je snadné nahmatat, a proto se využívají také k vyšetřování zad a určování šířky ramen. Nadpažky jsou na obr.12

naznačeny body a_3 a b_3 . Rozměr d_r je šířka ramen určena torakometrem nebo pelvimetrem. Úhel rotace ramen \mathcal{G} je opět definován natočením anatomické osy vůči mediální resp. frontální rovině měřeného subjektu, obr.12. Obdobně je určen úhel inklinace ramen vztažený k horizontále okolního prostoru.



Obr.11: Geometrie polohy hlavy v transverzální rovině pro určení rotace.



Obr.12: Geometrie polohy ramen v transverzální rovině pro určení rotace.

Anatomická horizontála hlavy je tedy definována čtyřmi body a anatomickou osu ramen určují dva body. Informaci o poloze šesti anatomických bodů na horní části těla pacienta, tj. hlavě a ramenech, je možné získat například kamerovým systémem. Kamerový systém musí být kalibrován a systémový souřadný systém definovaný kamerovou soupravou je ve shodě s horizontálou okolního prostoru, která je kolmá na vektor tíhového zrychlení Země.

Z určených úhlů rotace, inklinace a flexe/extenze hlavy, a rotace a inklinace ramen vůči zemskému souřadnému systému (horizontále) můžeme také vypočítat vzájemnou polohu hlavy a ramen. Úhel vzájemného natočení hlavy a ramen v transverzální rovině, tj. rotace hlavy vůči ramenům je

$$\kappa = \varphi - \mathcal{G}.$$

Úhel vzájemného nachýlení hlavy a ramen ve frontální rovině, tj. inklinace hlavy vůči ramenům je

$$\lambda = \zeta - \phi,$$

kde ζ je inklinace hlavy a ϕ je inklinace ramen.

Vyšetřování polohy hlavy v zemské souřadné soustavě a vůči ramenům těla může být doplněno, při vyšetřování v neurologii a psychologii, studiem polohy a pohybů očí. Vyšetřování polohy hlavy rozšířené o informaci o poloze a pohybu očí slouží při studiu rovnovážného systému, závrat'ových stavů či dyslexie.

Určování a analýza polohy očí

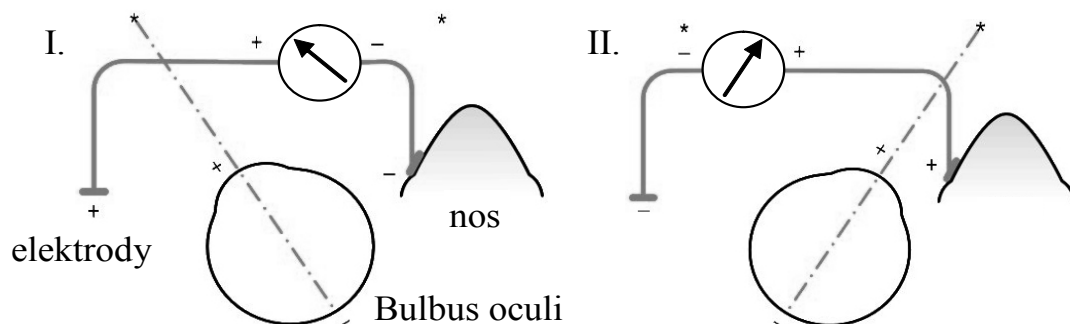
Měřením očních pohybů rozumíme činnost, jejímž výsledkem je signál informující nás o poloze oka, který se mění v závislosti na pohybech oka. Pohyby oka jsou realizovány okoohybnými svaly. Měření očních pohybů má dlouhou historii a v jejím průběhu bylo vyvinuto několik systémů, resp. metod měření, založených na odlišném principu. Způsobu měření pohybů oka odpovídají tyto metody:

- Magnetookulografie - Metoda užívá feritového kroužku se dvěma navinutými cívkami, zapouzdřenými nejčastěji do kontaktní čočky. Pohybem oka se mění indukce snímací cívky.

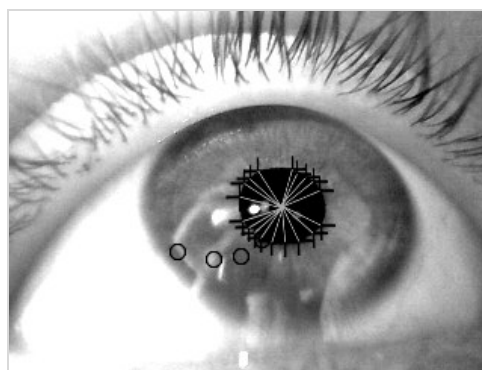
- Elektrookulografie - využívá potenciálové změny, jejíž podstatou je napěťový rozdíl mezi rohovkou a sítnicí. Pohyb oka způsobuje v jeho okolí malé změny elektromagnetického pole, které lze měřit. Oční pohyby registrujeme elektrodami umístěnými na kůži v blízkosti očí. Záznam elektrické aktivity od pohybu oka nazýváme elektrookulogram (EOG). EOG vykazuje větší výchylky ve světle než ve tmě z důvodu rozdílného potenciálu vznikajícím v barvivo sítnicového epitelu. V praxi však často při měření pohybů oka předpokládáme okolní osvětlení konstantní. EOG je registrována z povrchu kůže a proto je nutné rozpoznat a odfiltrovat případné artefakty. Pohyby víčka jsou nevyhnutné a je potřeba je identifikovat. K identifikaci artefaktů lze využít např. EMG z obličejových svalů.

- Infračervená okulografie - spočívá v ozáření oka pevným zdrojem infračerveného záření a následným měřením množství odraženého záření, které je závislé na poloze oka.

- Videookulografie - poloha oka se nejčastěji určuje z polohy středu zornice zaznamenané speciálními kamerovými systémy a výpočtovými algoritmy zpracování a hodnocení obrazu. U analýzy očních pohybů je tedy cílem, pro získání polohy oka, určit střed zornice nebo duhovky. Při měření torzních pohybů pak získat dostatečně kvalitní duhovkový popis.



Obr.13: Princip měření pohybu oka v elektrookulografii.



Obr.14: Využití videookulografie k určení okrajů zornice a trajektorie pohybu středu zornice.

Metody videookulografie jsou založeny všechny na obdobných principech, tj. snímané obrázky jsou buď porovnávány mezi sebou, nebo jsou vztaženy ke kalibrované scéně (situaci). Zvýšené požadavky jsou kladeny na schopnost rychle a kvalitně snímat požadovanou scénu. Běžné systémy v normě PAL nebo NTSC zachycují obraz s frekvencí 50 Hz, respektive 60 Hz (neprokládané). V lékařské praxi bylo prokázáno, že některé pohyby oka lze podrobně zachytit až při snímkové frekvenci 200 – 250 Hz, což představuje úhlovou změnu přibližně 400 – 450 °/s. Obdobně, rozlišovací schopnost normy PAL nebo NTSC neposkytuje dostatečnou rozlišovací schopnost například pro duhovkový popis. Je tedy vhodnější použití nových digitálních snímačů založených na technologii CCD/CMOS.

Jak bylo zmíněno, existuje více technik pro vyhodnocování očních pohybů. Při aplikaci videookulografie je nejdůležitější částí metody především algoritmus pro vyhodnocování polohy oka na základě identifikace středu zornice nebo duhovky a duhovkový popis pro sledování torzních

pohybů. Jedná se například o algoritmus detekce a určení bodů na okraji zornice, a proložení těchto bodů vhodnou matematickou funkcí, například funkcí popisující kruh či elipsu. Vhodnou metodou může být např. algoritmus RANSAC (Random Sample Consensus), kdy se na základě nalezených hraničních bodů provede vepsání elipsy (do snímku zornice či duhovky) a nalezení středu této elipsy. Tato metoda je vhodná nejen při použití IR spektra k hledání okrajů zornice, ale i pro viditelné spektrum při hledání okrajů duhovky. Výhodou je, že se pro sestavení elipsy nepotřebuje provádět vstupní kalibrace, metoda není ovlivněna změnou velikosti zornice a v neposlední řadě není potřeba znát celý rozměr zornice nebo duhovky.

Při IR osvětlení, obr.14, je zornička na snímku nejtmaší a k získání její polohy stačí použít tzv. prahování snímků. Po použití filtru šumu a nežádoucích obrazových artefaktů, např. k odstranění nežádoucích odlesků, získáme střed zornice např. pomocí hledání souřadnic centroidu využitím statických momentů:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{A}, \quad (21)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{A}, \quad (22)$$

kde x_C a y_C jsou souřadnice centroidu, x_i a y_i jsou souřadnice i -tého pixelu o ploše A_i , A je celková plocha objektu. Tento algoritmus má výhodu v jednoduché aplikaci, není ho však možné použít ve viditelném spektru a získat např. střed zornice na základě duhovky.

Dále se používá např. tzv. algoritmus Starburst, který využívá metodu nalezení přechodových bodů na hraně rozhraní. Základním požadavkem při vyhodnocování informačního obsahu obrazu je detekce objektů. Aby byly objekty detekovatelné, musí se výrazně lišit od pozadí obrazu. To znamená, že se musí lišit například jasovou úrovní. Bez existence jasových změn v obraze jsou objekty nezjistitelné. V místě, kde nastává změna jasové úrovně, se dá předpokládat hrana objektu. Detekce takovýchto jasových změn je úkolem hranových detektorů a prvním krokem v segmentaci obrazového obsahu a interpretaci objektů. Algoritmus tedy hledá pomocí histogramu, který koresponduje s hodnotami intenzity pixelů obrazu, nejpravděpodobnější body přechodu mezi zornicí a duhovkou nebo mezi duhovkou a bělimou. Po získání přechodových (hraničních bodů) se opět používá např. funkce RANSAC, kdy je na základě nalezených bodů sestavena elipsa a z ní nalezen přesný střed zornice resp. duhovky.

Vedle hledání středu zornice je častým požadavkem na systém i možnost měření torzních pohybů. Dřívější měření byla prováděna nejčastěji pomocí metody založené na semiinvazivním způsobu, kdy jsou na oko pacienta v oblasti duhovky nakresleny potřebné značky. Z natočení těchto značek je poté vypočítán torzní úhel. Alternativní metodou je využití korelace mezi duhovkovým popisem snímku měřeného a snímku předcházejícího nebo referenčního. K tomuto můžeme využít vztahu:

$$L(n) = \sum_{i=1}^d (ref_n(i) - pr(i))^2, \quad (23)$$

kde $L(n)$ je vzdálenost signálů n -tého výseku, ref_n je výsek z referenčního duhovkového profilu začínajícím na n -tém snímku s délkou d , pr je duhovkový profil právě zpracovávaného snímku s délkou d . Porovnáváním snímků s referenční hodnotou hledáme minimální vzdálenost přes všechna n , která odpovídá torznímu úhlu. Výchylku poté přepočteme ve stupních následujícím vztahem

$$\psi = (m - s) \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}, \quad (24)$$

kde ψ je relativní torzní úhel, m je pozice minima ve vektoru L , s je polovina rozdílu délek vektorů, φ_2 a φ_1 je úhel ve stupních, odpovídající konci, resp. začátku dráhy, ze které je počítán duhovkový profil a d je délka vektoru (počet prvků).

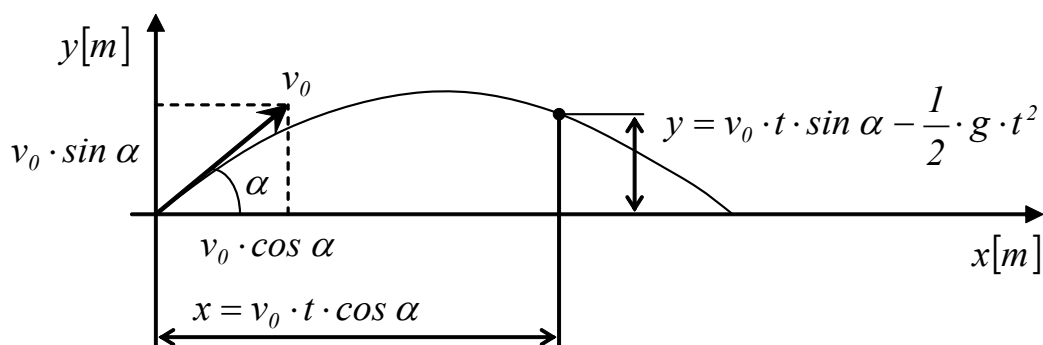
2.3 Mechanika hodů a skoků

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete dobu pádu objektu (popř. skoku subjektu) při znalosti naměřené či zadané počáteční rychlosti a elevačního úhlu.
- 2) Určete vzdálenost dopadu tělesa (popř. délku skoku subjektu) při znalosti počáteční rychlosti a elevačního úhlu.
- 3) Určete kinetickou energii vržených těles pro vodorovný a šikmý vrh.

Teoretický základ řešených úloh

V atletice se často setkáváme s pohyby, jako vrhy a skoky. Patří sem vrh koule, oštěpem, ale také skok do dálky, skok o tyči. Z dalších disciplín, kterých se problematika skoků týká, sem patří například skoky na lyžích, skoky do vody či jízda na koni. Z tohoto důvodu se budeme v této části zabývat fyzikou šikmého či vodorovného vrhu, resp. skoku. Šikmý vrh představuje pohyb tělesa v homogenním gravitačním poli, při kterém počáteční rychlost svírá s horizontem nenulový elevační úhel, obr.1. Pokud pohyb probíhá ve vakuu, pohybuje se těleso po parabole. Vrh vodorovný je pohyb, při kterém počáteční rychlost tělesa má směr kolmý ke směru tíhového zrychlení. Vodorovný vrh je složený pohyb - pohyb vrženého tělesa vodorovným směrem a volný pád tělesa. Vodorovný vrh je speciálním případem šikmého vrhu, kde trajektorii je část paraboly s vrcholem v místě hodů. Ve vzduchu (tzn. s nezanedbatelným odporem atmosféry) se těleso pohybuje po balistické křivce. Pro zjednodušení se ve sportovní biomechanice, z důvodu krátké doby pohybu a relativně nízké pohybující se rychlosti, předpokládá pohyb po parabole.



Obr.1: Rozklad počáteční rychlosti do x-ové a y-ové složky, [16].

Předpokládejme, že objekt, což může být v našem případě také tělo sportovce, má počáteční rychlost v_0 svírající s vodorovným směrem elevační (počáteční) úhel α . Následný pohyb se skládá z rovnoměrného přímočarého pohybu a z volného pádu (tedy rovnoměrně zrychleného pohybu ve směru gravitačního zrychlení \vec{g}). Předpokládejme, že ve směru gravitačního zrychlení bude položena osa y a kolmo k ní bude osa x . Trajektorií pohybu tedy bude rovinná křivka a platí vztahy:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad y = y_0 + v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \quad (1)$$

Určení dráhy a doby pohybu objektu

Výše uvedené vztahy můžeme využít například pro výpočty parametrů skoků ze skokanských můstků, kde $y_0 = h$ bude právě výška skokanského můstku, tj. převýšení nad bodem doskoku. V takovýchto případech se také často zanedbává úhel α , tj. $\alpha = 0$ a takovýto pohyb bude vodorovným vrhem. Vzdálenost doskoku od bodu výskoku (R) je pak:

$$R = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad (2)$$

a doba skoku

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad (3)$$

a odtud by z Pythagorovy věty byla výsledná rychlost v okamžiku doskoku ze dvou složek vektoru rychlosti:

$$v = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}. \quad (4)$$

Pro šikmý vrh předpokládejme, že $\alpha \neq 0$ a počátek skoku bude ležet na stejné horizontální rovině jako bod doskoku. Nechť tedy počátek soustavy souřadnic je v bodě $[x_0, y_0]$, a odtud

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \quad (5)$$

Pokud je velikost okamžité rychlosti ve směru osy y :

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t, \quad (6)$$

pak pro maximální výšku výstupu, kde je okamžitá rychlost tělesa nulová, platí

$$0 = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \quad (7)$$

a odtud určíme po dosazení do rovnice pro svislý pohyb maximální dosaženou výšku

$$y_{max} = y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{\bar{g}}. \quad (8)$$

Délka vrhu R , (tzv. dostřel, doskok atp.) tedy vzdálenost, po které těleso klesne do původní výšky, je určena z předpokladů:

$$R = x - x_0 = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad 0 = y - y_0 = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \quad (9)$$

Vyloučíme čas a dostaneme:

$$R = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha. \quad (10)$$

Při pohybu v prostředí s nezanedbatelným odporem bychom úlohu řešili pro asymetrickou balistickou křivku, u které je délka vrhu kratší než u pohybu při zanedbání odporu vzduchu.

Kinetická energie pohybujícího se objektu

Pohybující se objekt má kinetickou energii (tzv. pohybovou). Velikost kinetické energie závisí na hmotnosti a rychlosti objektu. V rámci Newtonovy mechaniky je kinetická energie určena vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2, \quad (11)$$

kde m je hmotnost objektu a \vec{v} je okamžitá rychlost tělesa. Místo rychlosti lze totéž vyjádřit pomocí hybnosti $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, dostaneme:

$$E_k = \frac{\vec{p}^2}{2 \cdot m}. \quad (12)$$

Rychlost i hybnost jsou vektory, proto by měly ve vztazích vystupovat jako vektory a nikoli skaláry. Zde však na jejich směru nezáleží, kinetická energie vyjde stejná, změní-li se směr pohybu a zachová-li se velikost rychlosti. Výpočet je zjednodušený a neuvažuje např. kinetickou energii v případě rotace objektu.

2.4 Kinematika a dynamika rotačního pohybu

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Vypočtete moment setrvačnosti paže z antropometrických údajů a pomocí vztahů z matematicko-fyzikálních tabulek (rozdělením paže na segmenty), porovnejte výsledky.
- 2) Určete kinetickou energii rotujícího segmentového modelu horní končetiny.
- 3) Určete moment síly vzhledem k ose otáčení ze znalosti momentu setrvačnosti a úhlového zrychlení.
- 4) Určete moment hybnosti a dokažte zákon zachování momentu hybnosti pro rotující tělo měřeného subjektu v prostoru.

Teoretický základ řešených úloh

Rotační pohyb je velmi častý druh pohybu, se kterým se setkáme v biomechanice. Tělesa, která se otáčejí kolem osy s úhlovou rychlostí ω , přičemž jednotlivé elementy mají hmotnosti m_i a jsou vzdáleny od osy r_i , mají rychlost $v_i = \omega \cdot r_i$ a kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot I, \quad (1)$$

kde I je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení. V rámci Newtonovy mechaniky je tedy celková kinetická energie translačně a rotačně pohybujícího se tělesa určena vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2. \quad (2)$$

Určení momentu setrvačnosti

Moment setrvačnosti tuhého tělesa popisuje setrvačné vlastnosti tělesa při rotaci kolem libovolné osy. Pro konkrétně zvolenou osu rotace je moment setrvačnosti definován vztahem

$$I = \int r^2 dm, \quad (3)$$

kde dm je element hmotnosti tělesa, r je vzdálenost elementu hmotnosti od osy rotace. Z definice hustoty ρ lze určit element hmotnosti jako

$$dm = \rho \cdot dV, \quad (4)$$

kde dV je objemový element tělesa. Pak můžeme psát

$$I = \iiint_V \rho \cdot r^2 \cdot dV. \quad (5)$$

Moment setrvačnosti závisí na poloze osy otáčení, nejmenší je pro osu procházející těžištěm. Moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm lze vypočítat pomocí Steinerovy věty. Steinerova věta umožňuje tedy vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm.

Můžeme v souladu s obr.1 psát, že:

$$I = \int r_A^2 dm = \int [(r_T + x)^2 + y^2] dm = \int (r_T^2 + 2 \cdot r_T \cdot x + r^2) dm, \quad (6)$$

neboť

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (7)$$

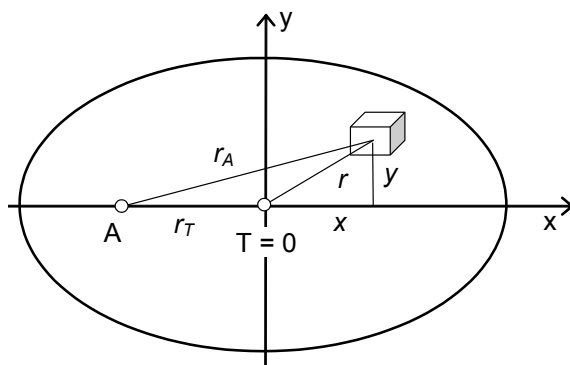
Protože jsme počátek soustavy souřadnic zvolili v těžišti, pak podle vztahu pro výpočet polohy těžiště tělesa pro zvolený souřadnicový systém platí:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{m} = \frac{1}{m} \cdot \int x \cdot dm \Rightarrow x_0 \cdot m = \int x \cdot dm = 0, \quad (8)$$

takže dostáváme pro moment setrvačnosti

$$I = r_T^2 \int dm + \int r^2 dm = m \cdot r_T^2 + I_T, \quad (9)$$

kde I_T představuje moment setrvačnosti konkrétního tělesa k ose procházející jeho těžištěm, m hmotnost tělesa a r_T vzdálenost osy rotace od těžiště.



Obr.1: Schéma určení Steinerovy věty, [16].

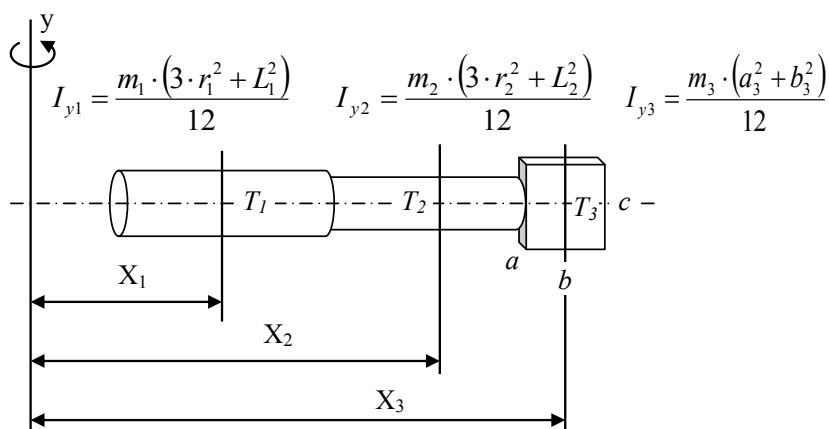
Moment setrvačnosti segmentů těla

V praxi vycházíme při určování hmotného momentu setrvačnosti I_{ii} jednotlivých segmentů těla z antropometrických údajů uvažovaných segmentů. Běžně jsou používány tabulky hodnot, které byly zjištěny experimentálně. Moment setrvačnosti segmentu těla určíme na základě znalosti celkové hmotnosti m (kg) a výšky jedince v (cm) vícenásobnou regresní rovnicí:

$$I_{ii} = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v. \quad (10)$$

Výše uvedené koeficienty B_{0i} , B_{1i} , B_{2i} jsou stanoveny experimentálně a jejich použití na „průměrnou“ populaci je tedy provedeno s jistou pravděpodobností a zatíženo určitou chybou.

Moment setrvačnosti složitějšího tvaru můžeme také určit rozložením tohoto zdánlivě složeného prostorového útvaru na několik základních geometrických tvarů, pro něž moment setrvačnosti jednoduše vypočteme například pomocí již předem určených vztahů v matematicko-fyzikálních tabulkách. Mějme jako příklad horní končetinu rozdělenou na tři základní části (segmenty), obr.2, a rotace bude vykonávána kolem osy y .



Obr.2: Model rotující rozpažené horní končetiny rozdělené na elementární geometrické objekty.

Podle obr.2 určíme moment setrvačnosti pro válcový segment s osou rotace kolmou na podélnou osu segmentu, a současně procházející těžištěm segmentu, pomocí vztahu:

$$I_{y1} = \frac{m_1 \cdot (3 \cdot r_1^2 + L_1^2)}{12}, \quad I_{y2} = \frac{m_2 \cdot (3 \cdot r_2^2 + L_2^2)}{12}, \quad (11)$$

kde m_1 je hmotnost pažní části a m_2 je hmotnost předloktí; r_1 a L_1 je poloměr a délka pažní části a r_2 a L_2 je poloměr a délka předloktí. Ruku reprezentuje krychle o stranách a , b , c s hmotností m_3 , a moment setrvačnosti této části pro osu rotace kolmou na podélnou osu paže, a současně procházející těžištěm segmentu, se určí vztahem:

$$I_{y3} = \frac{m_3 \cdot (a_3^2 + b_3^2)}{12}. \quad (12)$$

Za předpokladu rotace lidského těla kolem jeho podélné osy musíme využít Steinerovy věty k přepočtu momentů setrvačnosti jednotlivých segmentů k ose rotace těla. Výpočtem všech momentů setrvačnosti určíme celkový moment setrvačnosti horní končetiny (tj. momenty setrvačnosti jsou aditivní):

$$I_y = \sum_1^3 I_{yi} + \sum_1^3 m_i \cdot X_i^2, \quad (13)$$

kde X_i je vzdálenost těžiště konkrétního segmentu k ose rotace těla.

Podíváme-li se nyní na změnu momentu setrvačnosti horní končetiny v případě připažení k tělu, výpočet momentu setrvačnosti připažené ruky bude opět určen pomocí prostorových geometrických útvarů. Vztahy pro výpočet momentů setrvačnosti se změní, neboť osa rotace těla bude vůči jednotlivým segmentům natočená o 90 stupňů v porovnání s předchozí úlohou.

Podle obr.3 určíme moment setrvačnosti, pro válcový segment s osou rotace shodnou s podélnou osou a současně procházející těžištěm, vztahem:

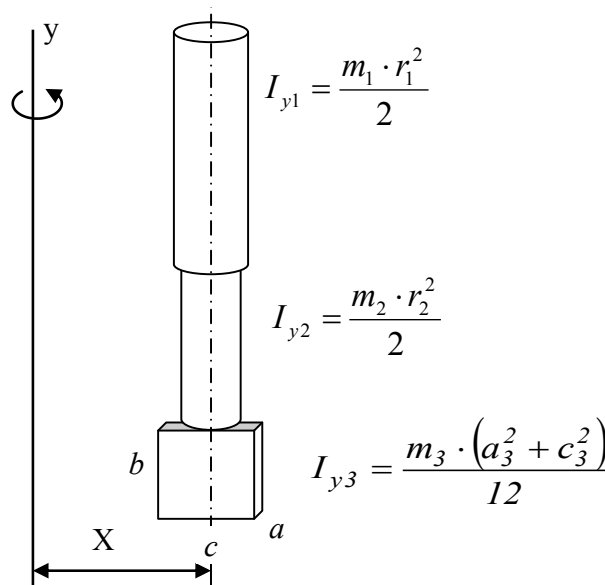
$$I_{y1} = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2}, \quad I_{y2} = \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2}, \quad (14)$$

zde značení a popis rozměrových parametrů odpovídá předchozímu případu. Moment setrvačnosti ruky se také spočte obdobně:

$$I_{y3} = \frac{m_3 \cdot (a_3^2 + c_3^2)}{12}. \quad (15)$$

Opětným využitím stejných předpokladů rotace a Steinerovy věty je celkový moment setrvačnosti horní končetiny:

$$I_y = \sum_1^3 I_{yi} + \sum_1^3 m_i \cdot X_i^2. \quad (16)$$



Obr.3: Model rotující připažené horní končetiny rozdělené na elementární geometrické objekty.

Z příkladu vidíme, jak se moment setrvačnosti mění se změnou polohy paže a je evidentní, že při rozpažení se moment setrvačnosti zvětší.

Určení momentu síly a momentu hybnosti

Pokud nás bude zajímat závislost momentu síly na momentu setrvačnosti, tak musíme předpokládat existenci momentu hybnosti \vec{L} , který je určen vektorovým součinem

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (17)$$

kde \vec{r} je polohový vektor a \vec{p} je hybnost ($\vec{p} = m \cdot \vec{v}$). Pak pro soustavu hmotných bodů platí vztah:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{v}_i), \quad (18)$$

kde \vec{v}_i je rychlost hmotného bodu při rotačním pohybu a je dána vztahem $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Odtud moment hybnosti:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 = I \cdot \vec{\omega}. \quad (19)$$

Moment hybnosti je tedy důležitá vektorová veličina, která se určuje vzhledem k bodu nebo ose, a je dána úhlovou rychlostí a momentem setrvačnosti. Dále lze využitím vztahu pro výpočet momentu síly uplatnit následující úvahu:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \right) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (20)$$

ve které bylo využito skutečnosti, že \vec{r} je polohový vektor, tj.:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (21)$$

a vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je roven nule $\vec{v} \times m \cdot \vec{v}$, tj. výraz

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} \quad (22)$$

je roven nule, a tudíž můžeme výraz v rovnici (20) přičíst. Touto úpravou jsme získali výraz pro provedení derivace součinu a odtud vztah mezi momentem síly a momentem hybnosti. Další úpravou získáme vztah závislosti momentu síly na momentu setrvačnosti při rotačním pohybu:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (23)$$

kde $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení. K ose y pak moment síly určíme vztahem $M_y = I_y \cdot \varepsilon_y$, kde ε_y je úhlové zrychlení/zpomalení vůči ose y .

Pokud by nás zajímala rotace hmotného objektu v třídímním prostoru podél všech tří os, používá se k výpočtu tzv. tenzoru setrvačnosti při znalosti momentů setrvačnosti a deviačních momentů:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & I_y & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad (24)$$

resp. jsou-li nediagonální prvky tenzoru momentu setrvačnosti, deviační momenty, rovny nule

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (25)$$

a odtud za předpokladu známých momentů setrvačnosti a úhlových zrychlení:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Moment hybnosti třídídimenzionálního rotačního pohybu tělesa je:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & I_y & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \text{ popř. } L = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (27)$$

a odtud:

$$L_x = I_x \cdot \omega_x, \quad (28)$$

$$L_y = I_y \cdot \omega_y, \quad (29)$$

$$L_z = I_z \cdot \omega_z, \quad (30)$$

kde I_i je moment setrvačnosti a ω_i je úhlová rychlost vzhledem ke konkrétní ose rotace. Nepůsobí-li na otáčející těleso moment žádné vnější síly, jeho moment hybnosti zůstává konstantní a platí Zákon zachování momentů hybnosti:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \text{const.} \quad (31)$$

to jest:

$$I_{\text{initial}} \cdot \vec{\omega}_{\text{initial}} = I_{\text{final}} \cdot \vec{\omega}_{\text{final}}. \quad (32)$$

Ze zákona vyplývá, že při zvětšování I se zmenšuje $\vec{\omega}$ a naopak. Ve sportovní biomechanice se zákona například využívá při piruetě krasobruslaře, kde se uplatňuje zrychlování nebo zpomalování rotace upažením nebo rozpažením horních končetin krasobruslaře. Dodejme, že při značné velikosti momentu hybnosti tělesa se projevuje tzv. gyroskopický efekt vyznačující se „odporem“ rotujících těles proti změně polohy osy otáčení. Proto se zejména tělesa otáčející se velkou úhlovou rychlostí vyznačují značnou stabilitou směru osy otáčení (gyroskopy).

Působí-li na otáčející těleso moment vnějších sil, moment hybnosti tělesa se mění. Rozdíl momentu hybnosti tělesa na začátku a na konci děje je roven impulsu momentu výslednice sil, které na toto těleso v průběhu děje působily. Impuls momentu síly \vec{I}_M je vektorová veličina charakterizující otáčivý účinek síly v určitém časovém intervalu:

$$\vec{I}_M = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt, \quad (33)$$

kde t je čas a \vec{M} je vektor momentu výslednice sil působících na dané těleso. Velikost impulsu momentu síly je (obdobně jako velikost impulsu síly) přímo úměrná době, po kterou působí síla mající otáčivý účinek, tj. moment \vec{M} . Věta o změně momentu hybnosti může být tedy vyjádřena ve tvaru:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (34)$$

2.5 EMG signál a hodnocení aktivity svalů

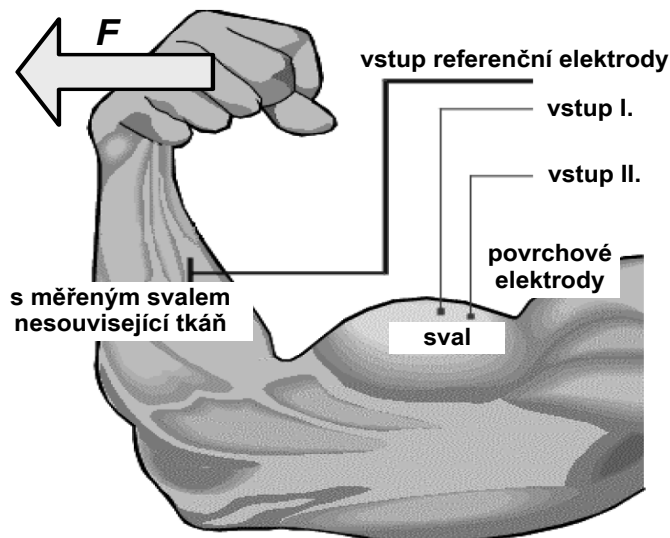
Úkoly měření a výpočtu

- 1) Změřte a zpracujte v programu Matlab EMG signál pro řízení robotické paže, vytvořte tzv. obálku signálu.
- 2) Zjistěte, zda-li koreluje velikost síly s měřeným EMG signálem. Ohodnot'te podle níže uvedené stupnice [21] velikost EMG signálu s ohledem na funkci svalu, tj. generovanou sílu.
- 3) Zjistěte, během pohybu paže či dolní končetiny, jakého pohybu se účastní triceps a jakého biceps, resp. quadriceps a hamstringy. Porovnejte velikost amplitudy obou signálů a zdůvodněte rozdíly.
- 4) Dokažte, že koncentrická síla je větší než excentrická a porovnejte s velikostí EMG signálu.

Teoretický základ řešených úloh

Elektromyografie (EMG) je vyšetřovací metoda, která je založena na snímání povrchové nebo intramuskulární svalové aktivity. Zaznamenává změnu elektrického potenciálu, ke které dochází při svalové aktivaci. Elektrická aktivita činného svalu, akční potenciál (AP), je vytvářena v průběhu svalového stahu. Svalový stah je způsobem nervovým vzruchem, přičemž jedno vlákno inervuje vždy několik svalových vláken. EMG je tedy měřeno již před svalovou kontrakcí. Jeden nervový stimul vyvolá krátké svalové škusnutí, tj. opakovaná stimulace po sobě jdoucích impulsů vyvolá svalovou kontrakci svalového vlákna. Síla kontrakce tedy závisí na četnosti impulsů za časový interval. U povrchové EMG prochází AP přes přilehlé svalové tkáně, na jejichž povrchu jsou detekovány. EMG signál je výsledkem sledu akčních potenciálů motorických jednotek, které jsou detekovány povrchovou elektrodou v blízkosti kontrahovaných svalových vláken, [3].

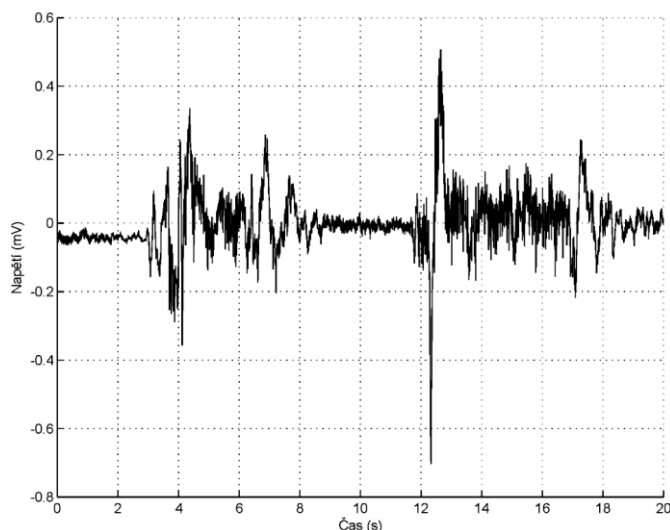
Elektromyografické signály se měří pomocí elektrod, které sledují rozdíl napětí v daném bodě. Podle uspořádání elektrod rozlišujeme monopolární a bipolární konfiguraci měření. Častěji používané bipolární uspořádání měří elektrický potenciál mezi dvěma body pomocí dvou elektrod. Aktivní část senzoru snímá elektrickou aktivitu a je umístěna nad bříškem zkoumaného svalu. Referenční elektroda je umístěna nad šlachou. Signál z elektrod se přivádí na diferenční zesilovač, který určuje rozdíl napětí mezi elektrodami. Tímto způsobem se odfiltrují signály, které jsou stejné a nepocházejí z daného svalu, [3].



Obr.1: Schéma zapojení laboratorního měření EMG a měření velikosti vektoru síly dynamometrem, (převzato z podkladů firmy CMA).

Měření a zpracování EMG signálu

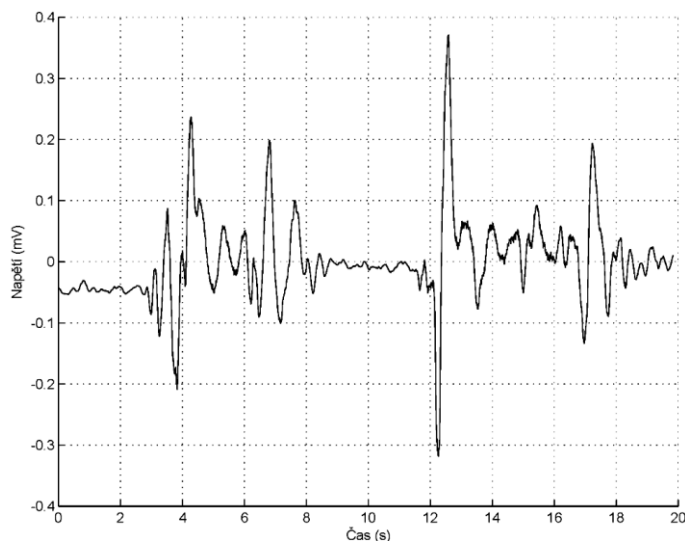
Umístění elektrod by mělo být voleno na střed svalového břicha, aby signál nerušila aktivace ostatních svalů. Referenční elektroda je umístěna mimo měřený sval. Během měření, při pohybu svalu dochází k pohybu tkáně se svalem nesouvisející, můžeme pozorovat výrazné pohybové artefakty, které vznikají při hnutí s elektrodou.



Graf 1: Příklad změřeného EMG signálu quadricepsu bez filtrace (extenze dolní končetiny v koleni).

Prvním krokem zpracování EMG signálu je filtrování signálu, původní signál je velmi zarušený, proto používáme filtr na vyhlazení v časové oblasti. Vyhlazený signál je uveden v grafu 2. V signálu je patrné kolísání izoliny. To je způsobeno především pohybem elektrod během kontrakce svalu.

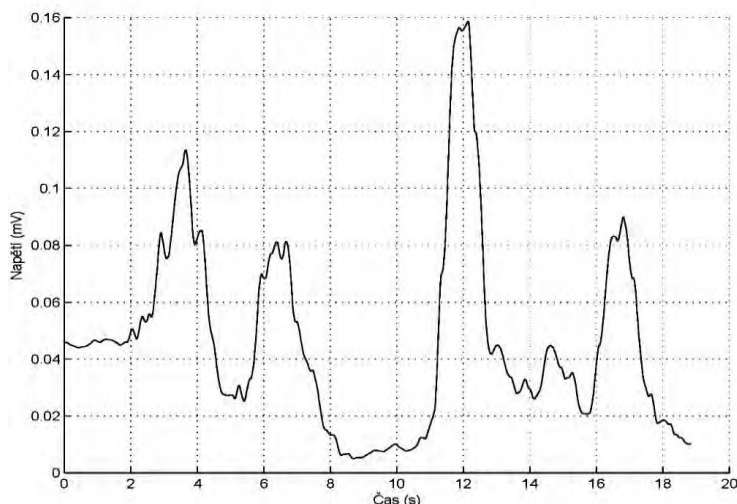
Následně jsou data v software offsetována tak, aby splňovala předpoklad, že EMG signál je střídavý signál oscilující stejnou vahou do kladných i záporných hodnot. Rektifikací ořežeme nebo přehodíme záporné hodnoty do kladných, tj. vytvoříme absolutní hodnoty ze všech registrovaných amplitud.



Graf 2: Filtrovaný EMG signál.

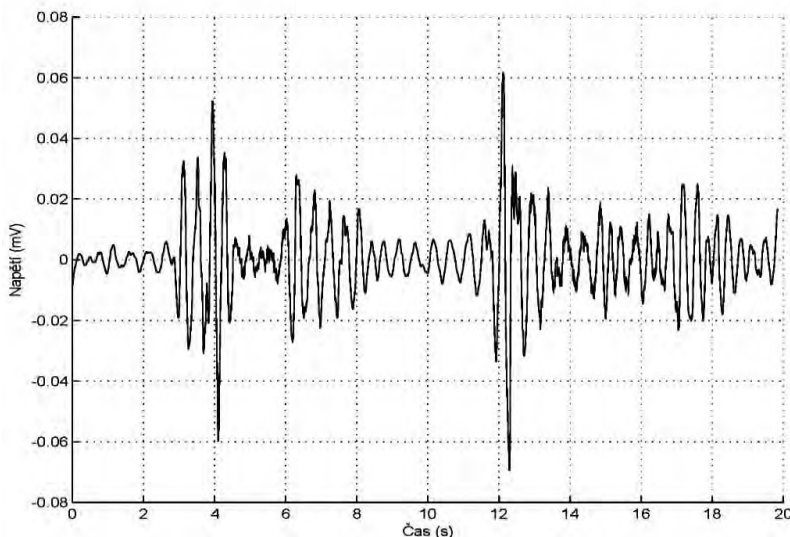
Dále provedeme vyhlazení signálu pro odstranění vysokofrekvenční složky. Ze signálu můžeme tvořit obálku signálu, kterou lze získat např. Hilbertovou transformací nebo prostým

zprůměrováním. Při zprůměrování je vyhlazení závislé na šíři okna filtru. Příliš malé okno způsobí nedostatečné vyhlazení, příliš velké zase zkreslí signál.



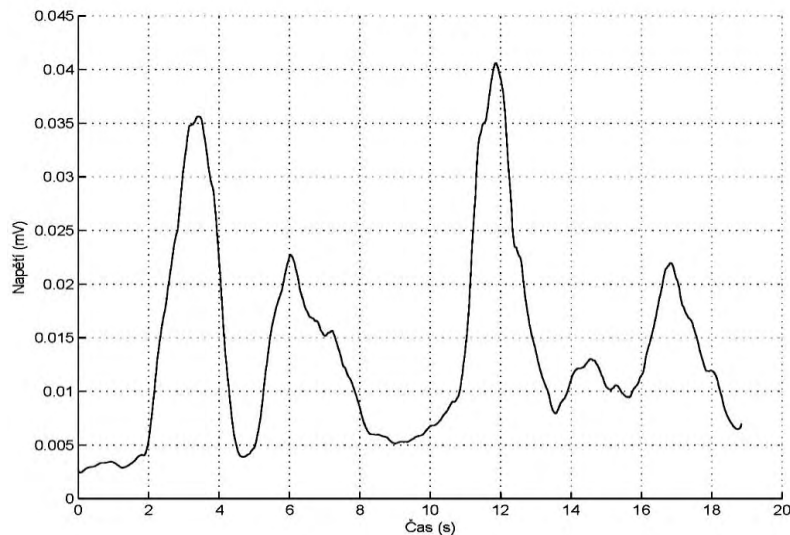
Graf 3: Obálka EMG signálu po rektifikaci a filtraci v časové oblasti.

Obálku velmi ovlivňují neodfiltrované pohybové artefakty, které se projevují jako výrazné „peaky“. Toto kolísání, včetně dalších nízkofrekvenčních složek, které nemají v signálu vypovídající hodnotu, je nutné odfiltrovat. Z tohoto důvodu je vhodné odfiltrování pohybových artefaktů, což je nutné provést ve frekvenční oblasti signálu filtrací dvojitou pásmovou propustí (horní mez: 500 Hz; dolní mez: 20 Hz, resp. pro síťový brum 50 Hz). Signál po filtraci v časové i frekvenční oblasti je uveden v grafu 4.



Graf 4: EMG signál po filtraci v časové i frekvenční oblasti.

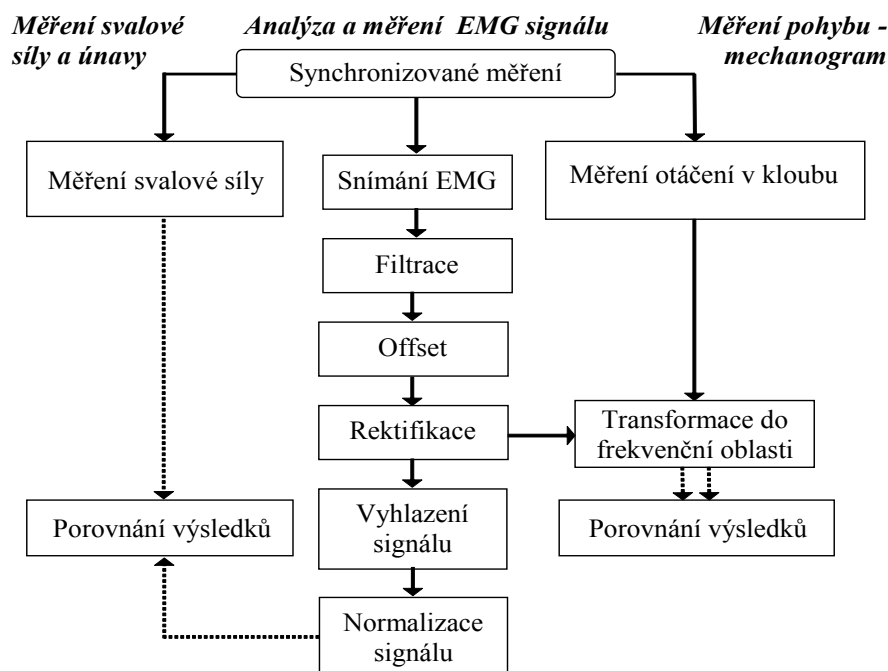
Při tvorbě obálky je vhodné zvolit šíři okna filtru např. šíři 200 ms. Obálka pak lépe reprezentuje vztah mezi silou svalu a signálem, jelikož odstraňuje „peaky“ vysokofrekvenčních složek, čímž dosáhneme plynulejšího odstupňování. Výsledkem uvedeného zpracování je obálka EMG signálu po filtraci v časové i frekvenční oblasti, graf 5.



Graf 5: Obálka EMG signálu po rektifikaci a filtraci v časové a frekvenční oblasti.

Měřený EMG signál slouží jako ukazatel zahájení svalové kontrakce, případné jeho zobrazení společně s grafem zobrazujícím pohyb končetiny nám nabízí další možnosti hodnocení.

V EMG signálu můžeme hodnotit především frekvenci a amplitudu. Význam amplitudy je ale diskutabilní, jelikož záleží na mnoha faktorech, které nejsou dány aktivitou svalu. Jedná se o velikost elektrod a nepřesnou definici polohy elektrod vůči aktivním svalovým vláknům. Dále, měření signálu obecně může být ovlivněno přechodovým odporem mezi kůží a elektrodami, artefakty z jiných svalových skupin a dalšími rušivými vlivy okolí.



Obr.2: Možnosti zpracování a analýzy EMG signálu společně s měřením sil a pohybů v biomechanice.

Amplituda EMG signálu obecně roste v závislosti na síle nebo kontrakční rychlosti svalu, tato závislost však poskytuje jen kvalitativní údaj o vztahu mezi proměnnými. Při otázce, jak se mění síla během dvou rozdílných úloh, nemůžeme přesně odpovědět, neboť se ukazuje, že závislost nemá pevný charakter. Řada faktorů může být eliminována normalizováním amplitudy EMG signálu a síly mezi kontrakcemi, ve kterých se elektroda nepohybuje a kdy vzájemná

vzdálenost mezi elektrodou a aktivními svalovými vlákny je fixována. Normalizací amplitudy EMG signálu lze tedy eliminovat faktory ovlivňující jeho vztah k produkované síle. Je vhodné pro každý sval detekovat EMG při jeho maximální izometrické kontrakci a při totožném umístění elektrod jako při detekci EMG ze zkoumaného pohybu, a i stejným způsobem jej zpracovat a vyhladit amplitudu. Běžně se také normalizuje síla s ohledem na maximální izometrickou sílu. Porovnání závislosti EMG signálu a síly by tedy mělo být provedeno během izometrické kontrakce. Kloub by měl být dobře fixován, aby přírůstek síly byl jen ze zkoumaného svalu, [3].

EMG záznam, získaný pomocí povrchových elektrod, zachycuje výsledný signál tvořený činností mnoha vzájemně interferujících motorických jednotek (MJ). Frekvence výbojů pracujících MJ se zvyšuje jen do určité hranice v závislosti na rostoucí síle kontrakce. Po dosažení maxima (asi za 0,1s) vstupuje do činnosti další MJ, která se chová obdobně. Takto se postupně aktivují jednotlivé MJ. Závislost frekvence MJ na napětí svalu tedy nevyjadřuje jednoznačné časové ani prostorové odstupňování síly volné kontrakce celého svalu. Nelze ji tedy využít pro sledování aktivity svalu v tomto směru. Frekvence, s níž pracují MJ, jsou však důležitým ukazatelem úrovně izometrické a izotonické kontrakce. Při zvětšování síly kontrakce se zvyšuje frekvence stahů jednotlivých MJ, tj. se zvyšující se silou kontrakce roste frekvence EMG signálu, lze ji tedy využít k hodnocení izometrické a izotonické kontrakce, [3].

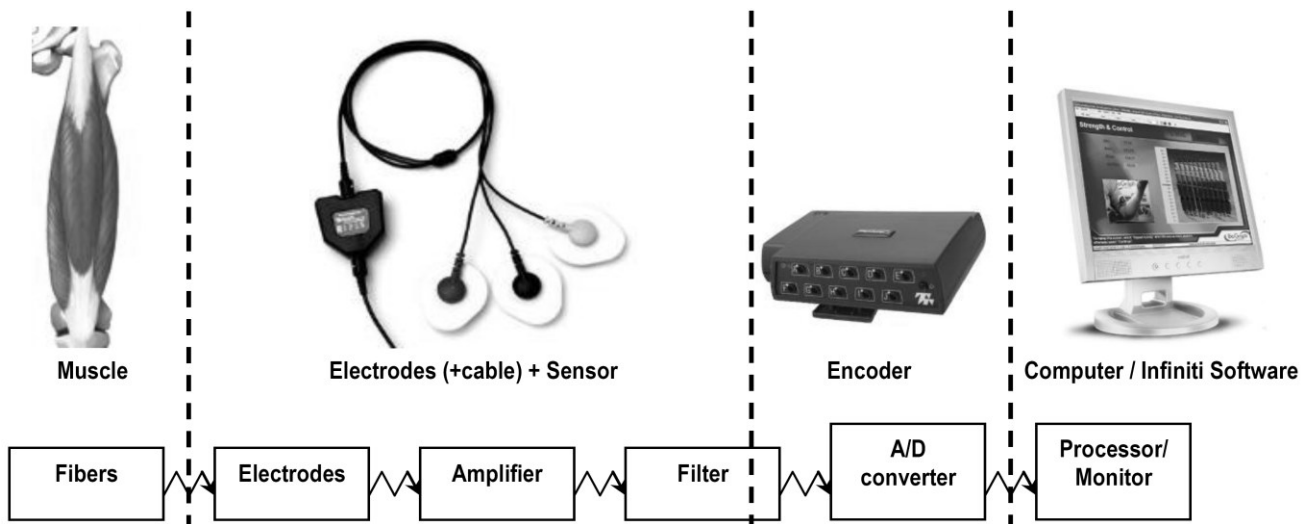
Vyšetření funkce svalstva EMG signálem

Víme-li, že velikost EMG signálu je ve vztahu s velikostí generované síly, můžeme EMG signálem provádět vyšetření funkce svalu, resp. generované síly. Níže je uvedena stupnice [21], podle které se svalová síla určuje:

- 0 - žádná svalová kontrakce (0 % svalové síly),
- 1 - náznak svalové kontrakce bez účinku na pohyb končetiny (10 % svalové síly),
- 2 - slabá svalová síla, která je schopna uvést vyšetřovaný segment končetiny do pohybu s vyloučením odporu daného hmotností končetiny (25 % svalové síly),
- 3 - svalová síla je schopna vyvolat pohyb proti odporu, který je dán hmotností segmentu vyšetřované končetiny (50 % svalové síly),
- 4 - svalová síla je schopna vyvolat pohyb proti mírnému odporu, který vyvolá vyšetřující (75 % svalové síly),
- 5 - plná svalová síla (až 100 % svalové síly).

Pro záznam dat, v průběhu měření EMG signálu a popř. síly svalu, můžeme použít např. ProComp5 Infinity systém pro fyziologická monitorování a výpočet a záznam dat biofeedbacku počítačem v reálném čase s pěti chráněnými vstupními senzory, resp. se dvěma vysokorychlostními kanály vzorkovanými 2048 vzorků/s a se třemi kanály vzorkovanými 256 vzorků/s. ProComp Infinity systém je schopen poskytnout širokou škálu objektivních údajů používaných při klinických pozorováních a biofeedbacku. Biofeedback je metoda, při níž se lidé učí zlepšovat své zdraví a výkonnost sledováním signálů produkovaných jejich vlastním tělem. Biofeedback je neinvazivní metoda, při které terapeut připojuje senzory k tělu pacienta (vyšetřovaného člověka) a tyto senzory poskytují řadu údajů, které se zobrazují na měřidle nebo PC tak, aby je pacient viděl. V našem případě systém detekuje EMG signály ze svalů a mění je na signály, které vyšetřovaný člověk sleduje na obrazovce monitoru. Pacient se tak učí přiřadit pohybové či silové schopnosti k aktuální úrovni svalového napětí a vytváří si nové zvyky udržování svalového napětí na potřebné úrovni po vhodnou dobu.

Proces záznamu EMG signálu systémem je uveden na obr.3, na pokožku nad měřeným svalem je umístěna elektroda snímající EMG signál, sensor následně nasnímaný signál zesiluje a filtruje. A poté je v A/D převodníku převáděn spojitý (tzv. analogový) signál na signál diskrétní (tzv. digitální). Důvodem tohoto převodu je potřeba zpracování původně analogového signálu na číslicovém počítači. Zpracovaný signál je pak v PC využit k hodnocení úrovně svalového napětí vyšetřujícím, nebo se signál využije v procesu biofeedbacku.



Obr.3: Proces záznamu EMG signálu systémem ProComp Ininiti, (převzato z návodu k použití přístroje od firmy Thought Technology).

III. Vybrané aplikace řešení silových a momentových účinků v biomechanice

3.1 Momenty a síly v zápěstí a prstech ruky

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete velikost izometrické síly, kterou musejí vytvářet svaly, aby vytvořily vámi měřený kroutící moment při úchopu dlaní.
- 2) Určete velikost izometrické síly, kterou musejí vytvářet prsty, aby vytvořily vámi měřený kroutící moment.
- 3) Vypočtete minimální velikost třecího součinitele, aby bylo bez prokluzu dosaženo zvoleného kroutícího momentu při znalosti velikosti síly stisku ruky.

Teoretický základ řešených úloh

Rotační pohyb segmentů těl je při pohybu vytvářen momentem síly, který vzniká transformací posuvného pohybu od silového účinku svalu. V ergonomii při návrhu madel, pák, ovladačů, ale také ve fyzioterapii či sportovní biomechanice nás zajímá velikost a změna momentu síly při sevření předmětu rukou. Dále nás zajímá, zda-li daný předmět udržíme za předpokladu jeho povrchových a tvarových charakteristik, a za předpokladu působení konkrétního momentu síly při sevření.

Určení sil ve svalech z momentu síly

Flexe a extenze ruky se realizuje mezi radiem os lunatum a os capitatum. Účast ostatních kostí je bezvýznamná. Při flexi rotuje os lunatum a os capitatum volárně a os lunatum se navíc posouvá dorzálně. Při extenzi ruky je tomu opačně, [6]. Sílu pro realizaci flexe vytváří svaly flx. carpi radialis, palmaris longus, flx. carpi ulnaris, flx. pollicis longus. Extenzi zápěstí realizuje ext. carpi radialis longus, ext. carpi radialis brevis, ext. carpi ulnaris.

Prostřednictvím změřeného momentu síly můžeme určit přibližnou velikost sil generovaných svaly F_f při flexi a extenzi za předpokladu dlaně snažící se pevně uchopit předmět. Můžeme tedy psát:

$$M_T = F_f \cdot f \Rightarrow F_f = \frac{M_T}{f}, \quad (1)$$

kde f je vzdálenost svalu resp. nositelky síly F_f od okamžité osy otáčení, tj. okamžité osy kloubu.

Z podmínky rovnováhy určíme vnitřní silové reakce v kloubu za předpokladu flexe

$$F_{rf} = F_f, \quad (2)$$

kde F_{rf} je reakční síla. Za předpokladu působení sil jak od svalů vytvářející flexi tak svalů pro extenzi, lze psát z podmínky rovnováhy, že:

$$F_r = F_{rf} + F_{re} = F_f + F_e. \quad (3)$$

S ohledem na velikost působeného točivého momentu je důležitá kvalita styčných ploch mezi dlaní a uchopeným předmětem. Jednou z veličin, která charakterizuje kvalitu uchopení, je součinitel smykového tření μ , což je fyzikální veličina, která udává poměr třecí síly a kolmé tlakové (normálové) síly mezi tělesy. Smykové tření je případem pasivního odporu. Jeho mechanismus spočívá v tom, že drobné (mikroskopické) nerovnosti na povrchu jednoho tělesa zapadají do drobných nerovností na povrchu tělesa druhého. Aby se tělesa navzájem po sobě pohybovala, musí být na překonání těchto nerovností, které jsou charakterizovány např. drsností povrchu atp., vyvozena ve směru pohybu jistá tažná síla. Tato situace se vnějšímu pozorovateli jeví jako by proti směru pohybu působil odpor - třecí síla. Hodnoty součinitele smykového tření závisí na konkrétní dvojici látek na povrchu a drsnosti těles, mezi nimiž smykové tření probíhá. Například smykové

tření kůže na kovu v klidu je 0,25 - 0,60 , v pohybu 0,12 - 0,36 . Výpočet třecí síly v případě úchopu předmětu dvěma proti sobě působícími stejnými silami, obr.1, je

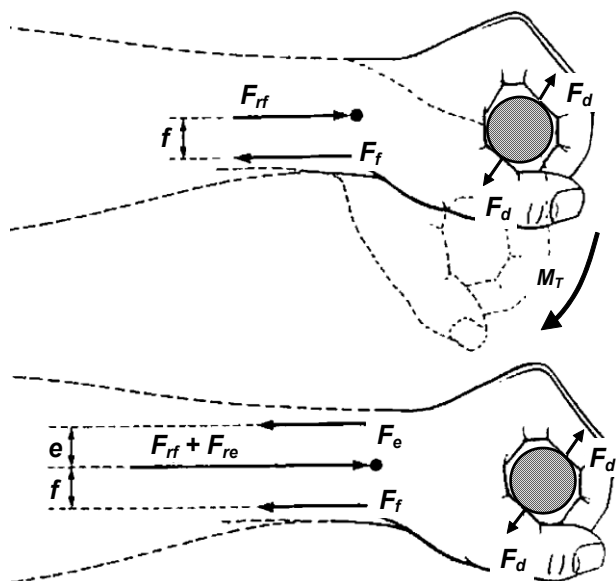
$$F_t = 2 \cdot F_d \cdot \mu \quad (4)$$

a moment tření pak je:

$$M_b = F_t \cdot r = 2 \cdot F_d \cdot \mu \cdot r, \quad (5)$$

kde r je poloměr uchopeného předmětu. Pokud využijeme poznatků z čepového tření, v případě úplného sevření předmětu dlaní a prsty, pak je třecí moment

$$M_b = 2 \cdot F_d \cdot r \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (6)$$

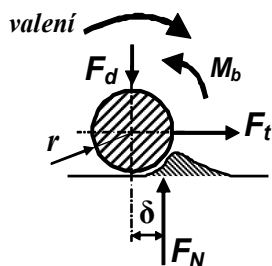


Obr.1: Schéma vytváření točivého momentu při úchopu dlaní.

Aby nedošlo k protáčení v dlaní uchopeného předmětu, musí platit:

$$M_b \geq M_T. \quad (7)$$

Odtud je evidentní, mimo jiné, důležitost co největšího součinitele tření z důvodu bezpečného úchopu.



Obr.2: Schéma vzniku momentu valivého odporu.

Dalším momentem, který působí proti prokluzu předmětu kruhového průřezu, obr. 2, je moment vznikající od valivého odporu. S valivým odporem se setkáme všude tam, kde se povrch obvodu tělesa valí či pokouší valit po povrchu jiného, např. rovinného, objektu a v důsledku poddajnosti materiálů dochází k tomu, že materiál povrchu je jistým způsobem „hrnut“ v jakési „vlně“ před tělesem. Rovněž těleso odvalované se poněkud zploští. Následkem těchto deformací je skutečnost, že normálová reakce F_N (jež je v silové rovnováze s přitlačnou silou F_d) nepůsobí na stejné nositelce jako tato přitlačná síla, nýbrž o rameno δ před ní. Vyvolává tedy brzdny moment, jenž působí proti směru valení:

$$M_b = F_N \cdot \delta. \quad (8)$$

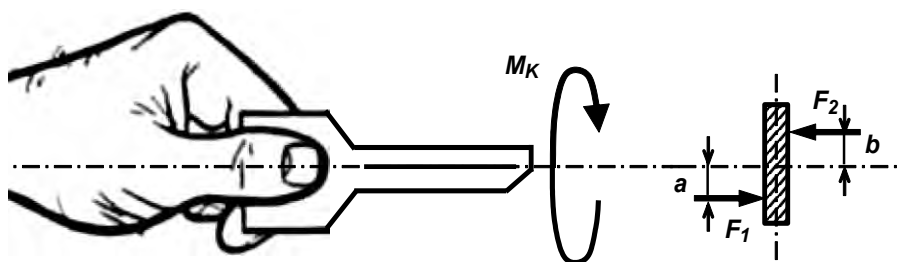
Předpokládejme úvahu, že pokud by měl být předmět kruhového průřezu udržen v pohybu, musí být tažen silou F_t , jež na rameni r vyrovnává brzdny moment, obr. 2:

$$F_t \cdot r = F_N \cdot \delta \Rightarrow F_t = F_N \cdot \frac{\delta}{r}, \quad (9)$$

kde r je poloměr předmětu kruhového průřezu a δ je tzv. rameno valivého odporu. Jak je zřejmé, mechanismus valivého odporu je zcela jiný, než mechanismus smykového tření. Přesto se často uvádí jako tzv. valivé tření. Zavedeme-li totiž substituci kde μ_v nazveme koeficientem valivého odporu (valivého tření), bude se valivý odpor navenek projevovat stejně jako smykové tření:

$$F_t = F_N \cdot \frac{\delta}{r} = F_N \cdot \mu_v \Rightarrow M_b = F_N \cdot r \cdot \mu_v. \quad (10)$$

Dalším pohybem ruky je pronace a supinace. Pronace je pohyb, při kterém se radius obtáčí kolem ulny, takže při plné pronaci jsou obě předloketní kosti překříženy v podobě písmene X. Rozsah pronace je závislý na spoluúčasti loketního a ramenního kloubu a také na pohybu lopatky. Při flektovaném lokti je rozsah pronace asi 150 stupňů, ale se spoluúčastí zmíněných spojů dosahuje až 360 stupňů. Supinaci charakterizuje návrat vřetenní kosti do paralelního postavení s ulnou a despiralizace vláken mezikostní membrány. Supinace je antigravitační pohyb, který (je-li flektován loketní kloub) staví horní končetinu do pozice optimální pro vyšetření a manipulaci s objekty, [6]. Oba tyto pohyby jsou charakteristické pro manipulaci s klíčem, madlem atp. Velikost momentu vyvolaného pronací a supinací je důležitá při pevnostním návrhu pomůcek a nástrojů, jejich velikostí a designu.



Obr.3: Vytváření kroutícího momentu při úchopu mezi prsty.

Nechť na element plochy dS působí prsty tlakovou silou dF , pak můžeme psát:

$$dF = p \cdot dS, \quad (11)$$

kde p je za předpokladu zjednodušení ve všech místech pod prsty stejný. Velikost celkové tlakové síly získáme integrací přes celou plochu:

$$F = \iint_S p \cdot dS. \quad (12)$$

Předpokládejme, že na klíč držený mezi prsty působí síly F_1 a F_2 , pak celkový kroutící moment je:

$$M_K = F_1 \cdot a + F_2 \cdot b, \quad (13)$$

kde a a b jsou vzdálenosti působišť, tj. nositelek, sil od středu otáčení. Pokud předpokládáme zjednodušení $F = F_1 = F_2$ a $r = a = b$, pak:

$$M_K = 2 \cdot F \cdot r. \quad (14)$$

K měření kroutícího momentu můžeme použít speciálních měřicích přípravků či systémů. Nejčastěji se u nich využívá principu křížového zapojení tenzometrů nalepených na hřídeli, která přenáší či zachycuje kroutící moment. Moderní provedení dynamometrů, pro měření kroutícího momentu, jsou řízena mikroprocesorem (kalibrace) a umožňují připojení k PC a zobrazení průběhu momentu na obrazovce monitoru resp. ukládání měřených dat.

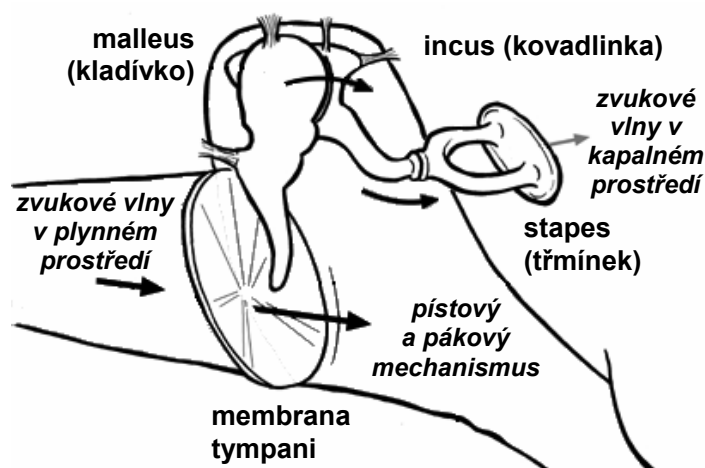
3.2 Mechanismus středního ucha

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Na modelu středního ucha změřte modely anatomických částí (ramena pákového mechanismu a plochy membrán).
- 2) Zjistěte poměr ploch na vstupu a výstupu modelu středního ucha jakožto zesilovacího pístového mechanismu.
- 3) Stanovte poměry sil na vstupu a výstupu modelu středního ucha jakožto zesilovacího pákového mechanismu.
- 4) Stanovte teoreticky poměry tlaků na vstupu a výstupu modelu středního ucha a tím ověřte, zda-li teoreticky zjištěné hodnoty zesílení tlaku pomocí zesilovacího pístového a pákového mechanismu odpovídají hodnotám skutečným.
- 5) Výpočtem ověřte důvody využití impedančního akustického transformátoru v podobě středního ucha.

Teoretický základ řešených úloh

Střední ucho je z technického pohledu jednoduchý, ale zajímavý pístově-pákový mechanismus, který se skládá z bubínku - pružné vazivové blány a tři sluchových kůstek - kladívka, kovádky a třmínku. Střední ucho zabezpečuje optimální přenos akustických signálů z vnějšího prostředí do tekutiny vnitřního ucha. Zvukové vlny přiváděné zevním zvukovodem rozechvívají bubínek o ploše asi 60 mm^2 , který je pak dále přenáší na středoušní kůstky. Bubínek není pro přenos zvukových vln nezbytný - při jeho porušení však klesá schopnost vnímat nízké tóny. Sluchové kůstky jsou tři. Kladívko, kovádko a třmínek. Kladívko je rostlé do bubínku, takže sleduje jeho vibrace. Směrem nahoru od bubínku se kladívko ztlušťuje v hlavičku, mezi hlavičkou a bubínkem je krček kladívka ztenčený. S hlavičkou kladívka je pevně skloubena kovádko, jejíž tělo vybíhá ve dva výběžky. Ke krátkému výběžku jsou upevněny závěsné vazy, dlouhý probíhá směrem dolů a je sklouben s hlavičkou třetí kůstky, třmínkem. Třmínek je zakončen oválnou ploténkou, která má délku asi 3mm, plochu asi $3,2 \text{ mm}^2$. Ploténka třmínku je přirostlá na blanku oválného okénka, která je mnohem menší než bubínek a která odděluje střední ucho od vnitřního.



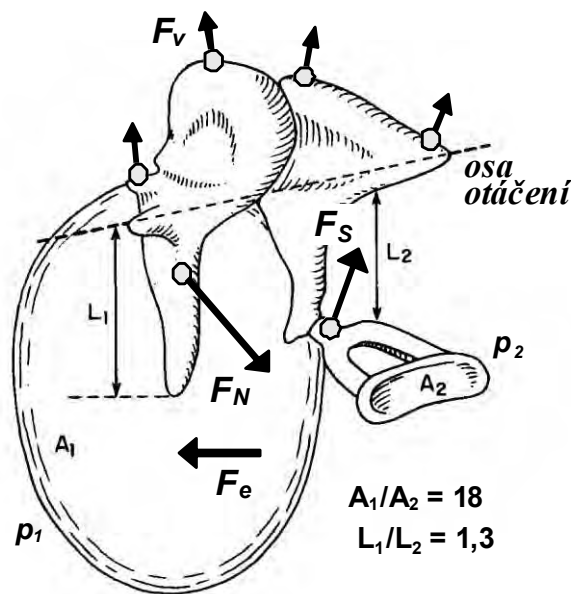
Obr.1: Pístový a pákový mechanismus středního ucha, [7, 24].

Hlavním důvodem existence středního ucha je to, že na základě značného rozdílu (přibližně 4000:1) specifických akustických impedancí vzdušného prostředí ($0,41 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$) a tekutiny vnitřního ucha ($1570 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$) dochází k velké ztrátě intenzity (asi 30 dB), která musí být vyrovnána zesilovací činností středoušního převodního systému. Mimo to, tento systém musí změnit velikost akustické

výchylky a akustického tlaku zvukového vlnění (zvukové vlnění o téže intenzitě má ve vzduchu velkou akustickou výchylku a malý akustický tlak, v tekutém prostředí malou akustickou výchylku a velký akustický tlak).

Uvedená ztráta energie je ve středoušním systému kompenzována dvěma mechanismy. Prvním je převod akustického vlnění z relativně velké plochy bubínku na malou plochu oválného okénka, které představuje téměř 20-násobné zvýšení tlaku. Tento způsob převodu akustické energie z plynného do kapalného prostředí se často označuje jako pístový převod. Druhým mechanismem je pákový systém středoušních kůstek, kladívko a kovádlínka představují nerovnoramennou páku. Zvýšení silového účinku tímto mechanismem je asi 1,3x.

Ve středoušní dutině jsou také dva malé příčně pruhované svaly: napínač bubínku a třmínkový sval. Napínač bubínku probíhá vedle sluchové trubice, jeho šlacha se otáčí kolem výběžku kladívka a upíná se na jeho krček, a je inervován z trojklanného nervu. Na schématu (obr.2) je reprezentován silou F_N . Druhým svalem je třmínkový sval, který se upíná na třmínek a druhým koncem do stěny dutiny bubínkové. Sval je inervován z lícního nervu a na obrázku je reprezentován silou F_S . Oba tyto svaly ovlivňují napětí bubínku a intenzitu rozkmitu kůstek. Mají za úkol ochranu sluchu při přílišném hluku. Závěsné vazy kůstek jsou na obrázku reprezentovány závěsnou silou F_V . Funkční součástí středního ucha je také Eustachova trubice, která spojuje středoušní dutinu s nosohltanem a slouží k upravování tlaků na obou stranách bubínku, tato síla působící na bubínek je označena F_e .



Obr.2: Schéma geometrie a funkce středního ucha, [7, 24].

Výpočet zesílení středním uchem

Při zanedbání působících sil na pákovém mechanismu, tj. $F_N = 0$, $F_V = 0$, $F_e = 0$, můžeme uspořádání kůstek považovat za dvouramennou páku plnící funkci silového násobiče. Pokud tedy:

$$\frac{L_1}{L_2} \cong 1,3 \quad (1)$$

pak pro silové poměry na páce, dle podmínky rovnováhy momentů platí:

$$F_1 \cdot L_1 = F_2 \cdot L_2 \Rightarrow F_2 = \frac{L_1}{L_2} \cdot F_1. \quad (2)$$

Podobně pro pístový mechanismus, jakožto zesilovač tlaku, můžeme napsat, že:

$$\frac{A_1}{A_2} \cong 18. \quad (3)$$

Pokud:

$$F_1 = p_1 \cdot A_1, \quad F_2 = p_2 \cdot A_2, \quad (4)$$

pak transformační funkce, tj. zesílení tlaku:

$$p_2 \cdot A_2 = \frac{L_1}{L_2} \cdot p_1 \cdot A_1 \Rightarrow p_2 = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot p_1 \Rightarrow p_2 \cong 1,3 \cdot 18 \cdot p_1 \cong 24 \cdot p_1. \quad (5)$$

Řešení akustického transformátoru

Středoušní kůstky ve středoušní dutině fungují také jako transformátor. Pro řešení takovéto úlohy předpokládejme podmínky spojitosti vlnění na rozhraní. Jde o dvě přirozené podmínky, které předpokládají, že na obou stranách rozhraní musí být stejná rychlost a stejný tlak. Dá se snadno ukázat, že první podmínka plyne z rovnice kontinuity a druhá z pohybové rovnice.

Dále předpokládejme, že akustická tlaková vlna (jedná se pouze o akustický tlak a nikoliv barometrický) dopadající na povrch, tj. rozhraní dvou prostředí, je p_i , odražená akustická tlaková vlna je p_r a tlaková vlna přenesená do druhého prostředí je p_t . Můžeme tedy psát, že vlnové rovnice rovinných vln jsou tvaru

$$p_i = P_i \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)}, \quad p_r = P_r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}, \quad p_t = P_t \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)},$$

kde amplitudy vlny jsou P_i , P_r a P_t . Úhlový kmitočet je označen ω , čas t (uvažujme $t=0$), vlnová čísla resp. vlnové vektory jsou označeny jako k_1 , k_2 a polohové vektory jsou označeny proměnnou x . Pokud tedy p_i , p_r a p_t zcela popisují tlakovou vlnu a tudíž tlak v systému, pak můžeme, v souladu s podmínkou spojitosti vlnění na rozhraní, předpokládat tyto tlakové poměry:

$$P_i + P_r = P_t, \quad (6)$$

kde $x=0$ reprezentuje polohu rozhraní, pro kterou platí, že $e^{ikx} = 1$. V tomto případě platí vztah

$$P_i + P_r = P_t \quad (7)$$

Což je rovnice popisující poměry mezi amplitudami tlakových vln.

Nyní zavedeme pojem „akustická impedance“, který bude důležitý pro další popis středního ucha. Necht' termín impedance označuje druh odporu, který klade prostředí vůči šíření zvukového vlnění. Čili prostředí brání určité vnější síle (vlnění) vytvářet v něm zóny zvýšeného a sníženého tlaku, tzn. podléhat zahušťování a zředování. Akustická impedance je určena pro obecný případ vztahem:

$$Z = \frac{p}{A \cdot v}, \quad (8)$$

kde p je akustický tlak, A je velikost plochy šíření zvuku a v je akustická rychlost. Odtud můžeme určit akustické rychlosti pro náš případ dvou prostředí:

$$v_i = \frac{P_i \cdot e^{-ik_1 x}}{A \cdot Z_1}, \quad v_r = -\frac{P_r \cdot e^{ik_1 x}}{A \cdot Z_1}, \quad v_t = \frac{P_t \cdot e^{-ik_2 x}}{A \cdot Z_2}, \quad (9)$$

Akustická impedance dopadajících a odražených vln je shodná z důvodu totožného prostředí, pouze přenesená vlna je ovlivněna jinou akustickou impedancí. Využitím podmínky spojitosti vlnění na rozhraní můžeme napsat, že:

$$v_i + v_r = v_t \quad (10)$$

a odtud:

$$\frac{P_i}{A \cdot Z_1} - \frac{P_r}{A \cdot Z_1} = \frac{P_t}{A \cdot Z_2} \Rightarrow \frac{P_i}{Z_1} - \frac{P_r}{Z_1} = \frac{P_t}{Z_2}. \quad (11)$$

Využitím tohoto odvozeného vztahu a vztahu popisujícím poměry mezi amplitudami tlakových vln získáme:

$$P_t = P_i \cdot \frac{2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \quad (12)$$

Neboť je akustická intenzita zvuku definována vztahem:

$$I = \frac{P^2}{Z}, \quad (13)$$

pak je činitel prostupu (propustnosti) definován pro náš případ poměrem

$$T = \frac{I_{\text{přenesen}}}{I_{\text{dopadající}}} = \frac{P_t^2 / Z_2}{P_i^2 / Z_1}, \quad (14)$$

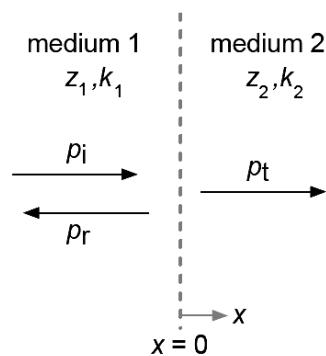
který nám de facto charakterizuje poměr energie přenesené do druhého prostředí a energie dopadající na rozhraní dvou prostředí z původního prostředí. Využitím vztahu pro činitele prostupu a vztahu popisujícího poměry mezi amplitudami tlakových vln zjistíme, že:

$$T = \frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (15)$$

Pro vzduch je specifická akustická impedance $0,41 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$, tuk $1380 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$, voda $1540 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$, krev $1610 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ a tekutinu vnitřního ucha $1570 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$. Pokud tedy do vztahu dosadíme známé specifické akustické impedance vzduchu a tekutiny vnitřního ucha, pak:

$$T = \frac{4 \cdot 0,41 \cdot 1570}{(0,41 + 1570)^2} = 1,0 \cdot 10^{-3}, \quad (16)$$

což znamená, že by došlo k téměř úplnému odrazu akustické energie vln a bez existence středního ucha by byla do vnitřního ucha přenesena fakticky nulová energie, jelikož akustická impedance (akustický vlnový odpor) vnitroušní kapaliny je asi 4000x větší než akustická impedance vzduchu.



Obr.3: Chování tlakové vlny resp. podélného vlnění na rozhraní dvou prostředí, [7, 24].

3.3 Silové poměry v předloktí horní končetiny

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Teoreticky stanovte nebo změřte správnou pozici úponu svalu (m. biceps brachii) na radiu.
- 2) Teoreticky stanovte nutnou sílu bicepsu v případě, že budete v ruce držet, ve stabilní poloze, závaží 10kg a úhel mezi předloktím a nadloktím bude 90° (humerus vs. ulna).
- 3) Experimentálně (na vlastním těle) změřte maximální sílu bicepsu a k tomu stanovte teoretický průřez bicepsu.
- 4) Experimentálně na vlastní paži odhadněte průřez vašeho bicepsu dle měření obvodu paže a porovnejte tuto hodnotu s předpokládanou hodnotou.
- 5) Měřte EMG signál na svalech realizujících flexi v loketním kloubu, a odhadněte distribuci celkové měřené síly svalů na jednotlivé svaly.

Teoretický základ řešených úloh

Častou úlohou v biomechanice je řešení silových poměrů v konkrétní části těla, což ale nebývá úlohou jednoduchou. V případě řešení silových poměrů v horní končetině se obecně jedná o prostorovou úlohu řešení využívající základů vektorové algebry. Vektor síly v prostoru můžeme jednoznačně popsat vztahem:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}, \quad (1)$$

kde \vec{F} je vektor celkové síly a F_x je složka síly v ose x , \vec{i} je jednotkový vektor v ose x , F_y je složka síly v ose y , \vec{j} je jednotkový vektor v ose y , F_z je složka síly v ose z , \vec{k} je jednotkový vektor v ose z . Točivý moment pak může být definován jako vektorový součin vektoru síly a polohového vektoru působíště síly:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (r_y \cdot F_z - r_z \cdot F_y) \cdot \vec{i} + (r_z \cdot F_x - r_x \cdot F_z) \cdot \vec{j} + (r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x) \cdot \vec{k}. \quad (2)$$

Dále předpokládejme, že horní končetina bude v rovnováze. Rovnováha je takový stav objektu v prostoru, kdy silové pole tvořené všemi působícími silami má za důsledek klidový stav ($v = 0$, tzv. statická rovnováha), nebo rovnoměrný přímočarý pohyb ($v = konst.$, tzv. dynamická rovnováha). Pro dosažení tohoto stavu musí platit podmínka rovnováhy, tj. součet všech působících sil a silových momentů se musí rovnat nule. Podmínka rovnováhy je důležitá pro vyšetřování chování mechanických soustav. Využívá se nejen pro vyšetření silových poměrů na objektech nacházejících se v klidovém stavu, ale také při analýze pohybu tělesa, kdy z podmínky rovnováhy sestavíme tzv. pohybové rovnice, přičemž aplikujeme tzv. D'Alembertův princip. Do součtu všech působících sil připojíme tzv. sílu doplňkovou, $D = -m \cdot a$, která následně uvede soustavu do stavu fiktivní rovnováhy, tudíž celkový součet sil bude opět roven nule, [18]. Pro obecný objekt/systém v 3D prostoru můžeme definovat podmínku statické rovnováhy, tj. podmínky rovnováhy sil a momentů:

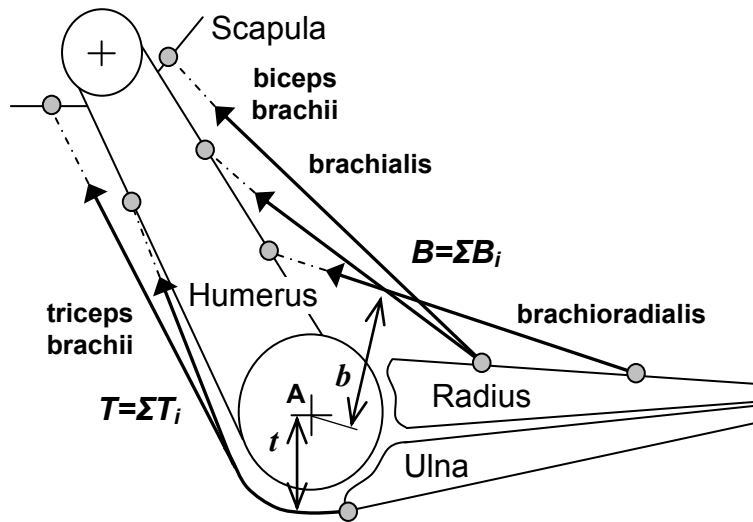
$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0. \quad (4)$$

Pokud úlohu zjednodušíme na rovinnou úlohu, pak budou rovnovážné podmínky definovány pouze vztahy:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \quad (5)$$

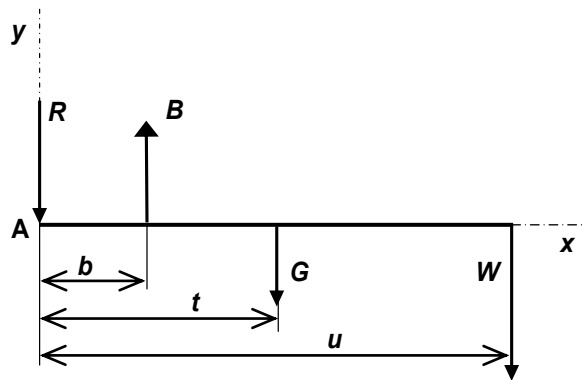
$$\sum M_z = 0. \quad (6)$$



Obr.1: Zjednodušené schéma silových poměrů v horní končetině, především předloktí.

Výpočet sil svalů horní končetiny

Síly generované svalovými skupinami horní končetiny mohou být reprezentovány vektory sil ve zjednodušeném modelu horní končetiny resp. předloktí, obr.2.



Obr.2: Silové poměry v rámci předloktí.

Nechť \vec{R} je reakční síla v loketním kloubu (bodě A), \vec{B} je síla vytvářena svaly ($\vec{B} = \sum \vec{B}_i$, obr.1) a pro zjednodušení úlohy bude její nositelka rovnoběžná s vertikální osou y a kolmá na osu horizontální x , obr.2. Velikost síly \vec{B} můžeme odhadnout, neboť 1cm^2 příčného průřezu svaly (svalové tkáně) v relaxovaném stavu může vytvořit přibližně 50N. Hlavní sval ohýbání (flexe) předloktí m. biceps brachii může zabírat cca 40 % plochy příčného průřezu paže. Hlavní šlacha m. biceps brachii se upíná na drsnatinu radia (tuberositas radii). Ta se nachází přibližně v 1/9 délky radia distálně od loketního kloubu. Síla \vec{G} je tíhová síla od hmotnosti předloktí, určená z antropometrie, a \vec{W} je tíhová síla zátěže držené v ruce. Vzhledem k tomu, že žádná ze sil nemá složku působící ve směru osy x a z , můžeme psát rovnici statické rovnováhy sil předloktí:

$$\sum F_y = 0, \text{ tj. } B_y - W_y - G_y - R_y = 0 \quad (7)$$

Pro momentovou podmínku statické rovnováhy je nutné postupně určit vektorový součin polohových vektorů a vektorů sil. Pro sílu v bicepsu můžeme napsat následující vektor síly:

$$\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}, \quad (8)$$

a této síle odpovídající polohový vektor dle obr.2:

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} = b_x \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}. \quad (9)$$

Vektorový součin pro výpočet momentu síly od svaly je tedy:

$$\vec{b} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot B_y) \cdot \vec{i} + (0 \cdot 0 - b_x \cdot 0) \cdot \vec{j} + (b_x \cdot B_y - 0 \cdot 0) \cdot \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + b_x \cdot B_y \cdot \vec{k}. \quad (10)$$

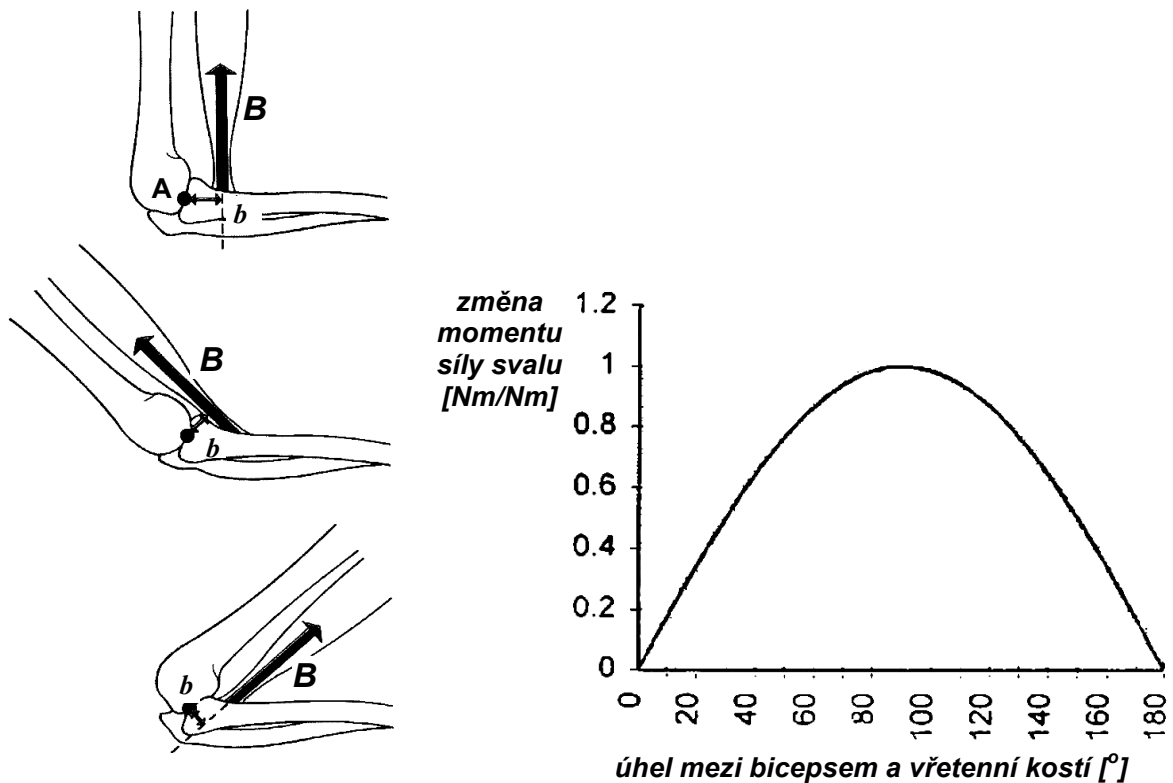
Obdobným způsobem se řeší vektorové součiny pro stanovení momentů od ostatních sil. Výše uvedený výpočet momentu nám ukazuje obecné řešení prostorové úlohy, jenž je převedena na úlohu rovinnou.

Po nalezení neznámých momentů sil můžeme definovat momentovou podmínku statické rovnováhy:

$$\sum M_z = 0, \quad \text{tj.} \quad b_x \cdot B_y - u_x \cdot W_y - t_x \cdot G_y - 0 \cdot R_y = 0. \quad (11)$$

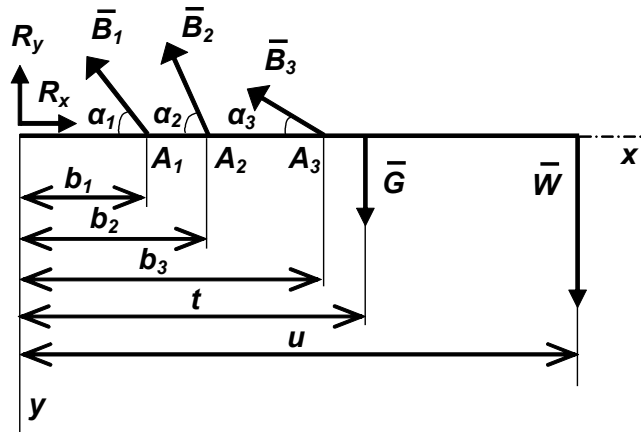
Z výše uvedených rovnic rovnováhy sil a momentu můžeme určit dvě neznámé: \vec{R} (reakční sílu v kloubu) a \vec{B} (výslednou sílu, kterou působí svaly), tj.:

$$B_y = \frac{u_x \cdot W_y + t_x \cdot G_y}{b_x}, \quad R_y = B_y - W_y - G_y. \quad (12)$$



Obr.3: Změna momentu síly od flexorů loketního kloubu.

Uvedený popis byl vztažen na staticky určitý systém, ve kterém odpovídá počet neznámých, tj. zjišťovaných sil a momentů, počtu rovnic. Ve většině případů však máme v úloze popisu soustavy mnohem více svalových sil, které působí pod proměnnými úhly, tj. velikosti úhlů se při změně polohy paže mění, obr.3. To znamená, že máme více neznámých než rovnic, které soustavu popisují. Takovýto systém nazýváme staticky neurčitý systém. Tento systém můžeme opět reprezentovat modelem silových poměrů na předloktí, obr.4.



Obr.4: Staticky neurčitá úloha silových poměrů v rámci předloktí.

Síly působící v rámci předloktí jsou od flexorů loketního kloubu: \vec{B}_1 síla na brachialis, \vec{B}_2 na biceps brachii a \vec{B}_3 je síla na brachioradialis. Dále na předloktí působí tíhová síla \vec{G} od hmotnosti předloktí a vnější síla (tíha) \vec{W} daná hmotností zátěže držené v ruce. Reakční složky síly v loketním kloubu jsou R_x a R_y . Pro silové rovnice statické rovnováhy v osách x a y můžeme psát:

$$\sum F_x = 0, \quad (13)$$

$$R_x - |\vec{B}_1| \cdot \cos(\alpha_1) - |\vec{B}_2| \cdot \cos(\alpha_2) - |\vec{B}_3| \cdot \cos(\alpha_3) = 0, \quad (14)$$

$$R_x = |\vec{B}_1| \cdot \cos(\alpha_1) + |\vec{B}_2| \cdot \cos(\alpha_2) + |\vec{B}_3| \cdot \cos(\alpha_3), \quad (15)$$

$$\sum F_y = 0, \quad (16)$$

$$R_y + |\vec{B}_1| \cdot \sin(\alpha_1) + |\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2) + |\vec{B}_3| \cdot \sin(\alpha_3) - |\vec{G}| - |\vec{W}| = 0, \quad (17)$$

$$R_y + |\vec{B}_1| \cdot \sin(\alpha_1) + |\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2) + |\vec{B}_3| \cdot \sin(\alpha_3) = |\vec{G}| + |\vec{W}|. \quad (18)$$

V případě momentové podmínky rovnováhy uvažujeme tuto podmínku pouze pro rovnici momentů vytvářených silami ve směru osy y . Složky sil v ose x nepřispívají svým účinkem, neboť jejich nositelky prochází počátkem, tj. bodem otáčení. Jak je ze schématu zřejmé, vytvářeny jsou momenty pouze pro osu z .

$$\sum M_z = 0, \quad (19)$$

$$|\vec{B}_1| \cdot \sin(\alpha_1) \cdot b_1 + |\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 + |\vec{B}_3| \cdot \sin(\alpha_3) \cdot b_3 - |\vec{G}| \cdot t - |\vec{W}| \cdot u = 0, \quad (20)$$

$$|\vec{B}_1| \cdot \sin(\alpha_1) \cdot b_1 + |\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 + |\vec{B}_3| \cdot \sin(\alpha_3) \cdot b_3 = |\vec{G}| \cdot t + |\vec{W}| \cdot u. \quad (21)$$

Z výše uvedených rovnic rovnováhy je zřejmé, že se jedná o staticky neurčitou úlohu, neboť máme pouze tři nezávislé rovnice rovnováhy a více než tři, (pět) neznámých: $|\vec{B}_1|$, $|\vec{B}_2|$, $|\vec{B}_3|$, R_x , R_y .

To znamená, že máme mnoho kombinací řešení neznámých sil. Pro řešení takového systému můžeme použít několik postupů. Všechny používané postupy řešení patří do dvou základních přístupů, tj. do redukčního nebo optimalizačního.

Redukční metoda nalezení neznámých sil svalů

Tento přístup je založen na empirické úvaze, experimentálních datech nebo kombinaci obou. Například se předpokládá, že dvě svalové skupiny mají obdobnou strukturu a vykonávají obdobné úlohy. Z této úvahy můžeme některé neznámé síly spojit v jeden společný účinek. Můžeme také měřením EMG signálu zjistit aktivitu svalových skupin a zanedbat ve výpočtu svalové skupiny, které vykazují minimální aktivitu. Ačkoliv se redukcí velmi zjednoduší řešení, nevýhodou

zůstává nebezpečí určení špatného řešení, neboť je často obtížné interpretovat EMG data a také ztrácíme detailní informace o svalových poměrech pro predikci sil a další možná využití přesných znalostí o reálných silových poměrech.

Příkladem řešení úlohy může být využití redukce za předpokladu neúčinku síly \vec{B}_1 na brachialis a síly \vec{B}_3 na brachioradialis. Odtud platí z podmínky statické rovnováhy momentů, že:

$$\sum M_z = 0, \quad (22)$$

$$|\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 = |\vec{G}| \cdot t + |\vec{W}| \cdot u, \quad \text{tj.} \quad |\vec{B}_2| = \frac{|\vec{G}| \cdot t + |\vec{W}| \cdot u}{\sin(\alpha_2) \cdot b_2}. \quad (23)$$

Následně můžeme určit, z podmínky rovnováhy sil v ose x a y , složky silové reakce v kloubu:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x = |\vec{B}_2| \cdot \cos(\alpha_2), \quad (24)$$

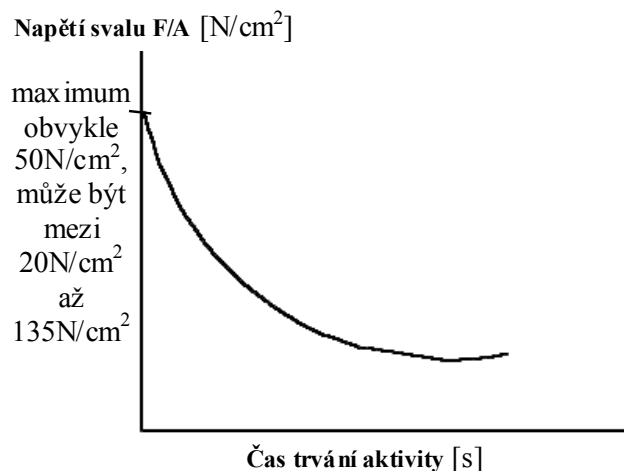
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_y = |\vec{G}| + |\vec{W}| - |\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2). \quad (25)$$

Jak je z postupu řešení zřejmé, velmi záleží na tom, jaké síly budeme redukovat a to také velmi ovlivní určené výsledné síly v kloubu, a relevantnost výsledků. Je také zřejmé, že při zjištění neznámých $|\vec{B}_1|$, $|\vec{B}_2|$, $|\vec{B}_3|$ je následné zjištění R_x , R_y , pomocí podmínek rovnováhy sil, jednoduchou záležitostí. Z tohoto důvodu se dále budeme zabývat především zjištěním svalových sil \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{B}_3 .

Optimalizační metody nalezení neznámých sil svalů

Při řešení úlohy tímto způsobem předpokládáme, že svalové skupiny působí všechny a není provedena jejich redukce. Vlastní řešení však musí být doplněno některou optimalizační metodou, která umožňuje nalezení minimální hodnoty předem definované charakteristické veličiny, dle které je optimalizace realizována. Toto řešení se z obecného pohledu odvolává na evoluční (vývojové) hledisko, které předpokládá, že všechny vyšší organismy optimálně využívají vynaloženou energii, v našem případě energii poskytnutou svaly k uskutečnění pohybu.

Jedno z řešení je založeno na předpokladu, že svalová únava souvisí s fyziologickým napětím svalu, které je definováno na základě síly odvozené z fyziologického příčného průřezu svalu. Obecně je známo, že svaly mohou vytvořit vysokou sílu po krátké časové trvání a nízkou sílu po dlouhou dobu. Ve skutečnosti je doba, po kterou může sval udržovat svou aktivitu, nepřímo úměrná třetí mocnině velikosti napětí svalu.



Graf 1: Očekávaný graf závislosti napětí svalu na době trvání aktivity svalu.

Na základě uvedené závislosti jsou navrženy optimalizační kritéria vycházející z předpokladu minimalizace svalového napětí. Jinými slovy předpokládáme, že všechny svaly vykonají požadovaný úkon s minimálním vyčerpáním. Matematicky můžeme úlohu zapsat takto

$$\text{Min}_{B_i} \sum_{i=1}^m \left(\frac{|\vec{B}_i|}{A_i} \right)^n \quad (26)$$

s podmínkou, že množina přípustných řešení je popsána vztahem

$$\sum (\vec{b}_i \times \vec{B}_i) = \vec{M}, \quad (27)$$

kde \vec{B}_i , jsou individuální svalové síly, A_i jsou příčné průřezy jednotlivých svalů, n je zvolený exponent, \vec{b}_i je polohový vektor, tj. rameno působišťe síly svalu, a \vec{M} je celkový moment vytvořený silami od svalů.

V závislosti na zvolené hodnotě n se bude jednat o lineární programování ($n=1$), kvadratické programování ($n=2$) a obecný problém nelineárního programování ($n>2$).

Na základě uvedeného můžeme napsat účelovou funkci pro uvedený problém:

$$\text{Min}_{B_1, B_2, B_3} \left(\frac{|\vec{B}_1|}{A_1} \right)^n + \left(\frac{|\vec{B}_2|}{A_2} \right)^n + \left(\frac{|\vec{B}_3|}{A_3} \right)^n. \quad (28)$$

Předpokládejme, že celkový moment vytvořený silami svalů musí být v rovnováze s celkovým maximálním momentem vytvářeným vnějšími silami a tíhovými silami. V našem případě se jedná o moment od hmotnosti předloktí a moment od hmotnosti zátěže držené v ruce. Tyto jednotlivé momenty určíme součinem, a dle obr.4 můžeme napsat, že:

$$\vec{t} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t_x & 0 & 0 \\ 0 & G_y & 0 \end{vmatrix} = -t_x \cdot G_y \cdot \vec{k} = -t \cdot G \cdot \vec{k}, \quad (29)$$

$$\vec{u} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -u_x & 0 & 0 \\ 0 & W_y & 0 \end{vmatrix} = -u_x \cdot W_y \cdot \vec{k} = -u \cdot W \cdot \vec{k}. \quad (30)$$

Pro statickou rovnováhu momentů tedy platí podmínka:

$$|\vec{B}_1| \cdot \sin(\alpha_1) \cdot b_1 + |\vec{B}_2| \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 + |\vec{B}_3| \cdot \sin(\alpha_3) \cdot b_3 = |\vec{G}| \cdot t + |\vec{W}| \cdot u. \quad (31)$$

Z výše uvedeného můžeme definovat problém pro optimalizační úlohu, a pokud předpokládáme $n=1$, pak budeme řešit úlohu lineárního programování. Necht' tedy platí účelová funkce:

$$\text{Min}_{B_1, B_2, B_3} \left(\frac{|\vec{B}_1|}{A_1} \right) + \left(\frac{|\vec{B}_2|}{A_2} \right) + \left(\frac{|\vec{B}_3|}{A_3} \right) \quad (32)$$

s předpokladem, že množina přípustných řešení je popsána omezující podmínkou (31).

Znamé hodnoty jsou: $|\vec{G}|, |\vec{W}|, t, u, b_1, b_2, b_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Hodnoty příčných průřezů jednotlivých svalů (A_1, A_2, A_3) jsou také známé hodnoty, které zjistíme z fyzikálních vlastností svalů, které jsou uvedeny v anatomických studiích či vědeckých publikacích věnujících se např. antropometrii.

Neznámými tedy zůstávají: $|\vec{B}_1|, |\vec{B}_2|, |\vec{B}_3|$ tj. B_1, B_2, B_3 .

Pro řešení problému nalezení neznámých hodnot sil, se zachováním definovaného minima účelové funkce, je možné použít řadu výpočtových algoritmů. Nejznámější algoritmus na řešení úlohy lineárního programování je tzv. simplexový algoritmus (původem od G. B. Dantziga, 1951).

Existují samozřejmě další, asymptoticky rychlejší algoritmy, např. elipsoidová metoda (L. Khachiyan, 1979), metoda vnitřních bodů (N. Karmarkar, 1984), atd.

Pokud budeme řešit úlohu pomocí kvadratického programování, kde předpokládáme $n=2$, pak je úloha určena touto účelovou funkcí a podmínkou (31):

$$\text{Min}_{B_1, B_2, B_3} \left(\frac{B_1}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{B_2}{A_2} \right)^2 + \left(\frac{B_3}{A_3} \right)^2. \quad (33)$$

Na řešení úlohy kvadratického programování se používají tzv. komplementární algoritmy, např. Wolfeho metoda nebo Lemkeho algoritmus.

Výpočtově nejnáročnějším přístupem řešení úlohy je řešení pomocí nelineárního programování, kde platí, že $n > 2$. Obecně úlohy nelineárního programování dělíme na dva základní typy:

- optimalizace bez vazeb. Používané algoritmy jsou: metoda největšího spádu, metoda sdružených gradientů, DFP (Davidon-Fletcher-Powell).
- optimalizace s vazbami. Používané algoritmy jsou: metoda přípustných směrů, Veinottovy opěrné nadroviny, penalizační algoritmy, bariérové algoritmy.

Jedná se převážně o metody iterační.

Aplikací konkrétních známých hodnot $G, W, t, u, b_1, b_2, b_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, A_1, A_2, A_3$ do úlohy nalezneme hodnoty neznámých sil B_1, B_2, B_3 . Přičemž předpokládáme, že s vyšším exponentem n v účelové funkci bude potřebná celková generovaná síla svalů rovnoměrněji redistribuována z jednoho zatěžovaného svalu na všechny účastníci se svaly tak, aby jeden sval nebyl dlouhodobě vystaven vysokému náporu, který by způsobil jeho rychlou únavu. Analýzou výsledků a porovnáním s naměřeným EMG signálem svalstva lze zjistit korelaci.

Bylo zjištěno, že lineární programování identifikuje zatížení pouze mála svalů z celkového počtu, tj. je nevhodně určena redistribuce celkového namáhání všech svalů. A naopak metoda nelineárního programování je příliš citlivá na případná špatně změřená data, která jsou vstupními hodnotami do procedury výpočtu, což vede ke špatným výsledkům. Z tohoto důvodu bylo navrženo více omezujících podmínek do výpočtu. První je použití momentové rovnice rovnováhy (27) jako lineární omezující podmínky. Druhou omezující podmínkou je lineární nerovnost, která je daná předpokladem maximálního svalového zatížení, přičemž očekáváme minimalizaci tohoto maximálního svalového zatížení. Uvedený problém můžeme zapsat jako:

$$\text{Min}_{B_i} \sigma \quad (34)$$

s podmínkou:

$$\frac{|\vec{B}_i|}{A_i} \leq \sigma. \quad (35)$$

K řešení tohoto problému musíme předpokládat, že maximu hodnoty B_i / A_i bude rovno σ . Pak můžeme tento problém přepsat na tzv. Minimax úlohu

$$\text{Min}_{B_i} \text{Max} \frac{B_i}{A_i} \quad (36)$$

s podmínkou (27). Jedná se opět o řešení metodou optimalizace, tzv. metodou minimaxu, která je ve svém principu metodou prohledávání možných alternativ řešení do hloubky s omezením hloubky prohledávání, tj. prohledávaný prostor alternativ řešení má obecně podobu stromové struktury. Důležitá je zde volba statické ohodnocovací funkce, která složí k ohodnocení možných alternativ řešení. Pro nalezení nejvhodnějšího řešení se využívá iterativního algoritmu.

Závěrem řekněme, že výše použité metody optimalizace vedou k rozdílným odhadům svalových sil. Nicméně, pokud aplikujeme různé optimalizační úlohy, některé z výsledků odpovídají základním předpokladům a to fyziologickým kritériím, jakými jsou únava svalů či jejich napětí. Nutno však připomenout, že se jedná o formulaci průměrného napětí v celém svalu (tj. svalové skupině) a není respektována např. pevnost jednotlivých svalových vláken, které se v různých případech zásadně

liší, pokud jde o fyzikální vlastnosti. K pochopení problému řešení rozložení napětí ve svalu je nutné provádět hierarchický rozbor, tj. rozdělení tkáňové struktury svalu a studium fyzikálních vlastností této struktury.

Ověření optimalizačních řešení

Obecně je velmi obtížné experimentálně ověřit výsledky optimalizačních metod. Jednou z metod je porovnání výsledků s naměřenými EMG daty, toto je v podstatě běžně užívaná základní metoda. Pomocí této metody zjistíme, do jaké míry jsou svaly zapojeny do činnosti a jakou přibližně působí silou. Další otázkou ověření je, zda-li naše schéma řešení dosáhlo nejlepší odpovědi na staticky neurčitý problém. Toto je opět obtížné ověřit přímou metodou. Základem kontroly je ujistit se, že řešení získané pomocí optimalizace odpovídá a splňuje v úvodu definované rovnice rovnováhy. Poznamenejme, že pokud je momentová rovnice rovnováhy použita jako jedna z omezujících podmínek, můžeme obecně předpokládat, že bude tento požadavek splněn.

Další úroveň ověření platnosti výpočtů je použití kritériální rovnice optimality z teorie variačního počtu. Touto teorií se zde nebudeme podrobně zabývat a pouze předpokládáme, že takováto rovnice platí pro formulování optimalizace účelovou funkcí a respektuje vyšší než jen lineární tvary funkcí. Předpokládáme exponent n , pak rozšířená Lagrangeova funkce (lagrangián) může být zapsána ve tvaru:

$$L = \left(\frac{\bar{B}_1}{A_1}\right)^n + \left(\frac{\bar{B}_2}{A_2}\right)^n + \left(\frac{\bar{B}_3}{A_3}\right)^n - \lambda \cdot \left[\bar{B}_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot b_1 + \bar{B}_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 + \bar{B}_3 \cdot \sin(\alpha_3) \cdot b_3 - (\vec{G} \cdot t + \vec{W} \cdot u) \right] \quad (37)$$

Nyní použijeme derivace rozšířeného lagrangiánu s ohledem na jednotlivé svaly, resp. jejich silové působení, a Lagrangeův multiplikátor λ . Odtud dostáváme:

$$\frac{\partial L}{\partial B_1} = n \cdot \left(\frac{B_1^{n-1}}{A_1^n}\right) - \lambda \cdot [\sin(\alpha_1) \cdot b_1] = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_2} = n \cdot \left(\frac{B_2^{n-1}}{A_2^n}\right) - \lambda \cdot [\sin(\alpha_2) \cdot b_2] = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_3} = n \cdot \left(\frac{B_3^{n-1}}{A_3^n}\right) - \lambda \cdot [\sin(\alpha_3) \cdot b_3] = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = B_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot b_1 + B_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 + B_3 \cdot \sin(\alpha_3) \cdot b_3 - (G \cdot t + W \cdot u) = 0. \quad (41)$$

V dalším kroku určíme Lagrangeův multiplikátor λ z první variace rozšířeného lagrangiánu, tj. pro první sílu, resp. první rovnici ze čtyř:

$$\lambda = \frac{n}{\sin(\alpha_1) \cdot b_1} \cdot \frac{B_1^{n-1}}{A_1^n} \quad (42)$$

Jestliže nahradíme Lagrangeův multiplikátor v rovnicích pro druhou a třetí sílu, dostaneme následující vztahy reprezentující velikostní poměry mezi svalovými silami:

$$n \cdot \frac{B_2^{n-1}}{A_2^n} - \frac{n}{\sin(\alpha_1) \cdot b_1} \cdot \frac{B_1^{n-1}}{A_1^n} \cdot \sin(\alpha_2) \cdot b_2 = 0, \quad (43)$$

$$n \cdot \frac{B_3^{n-1}}{A_3^n} - \frac{n}{\sin(\alpha_1) \cdot b_1} \cdot \frac{B_1^{n-1}}{A_1^n} \cdot \sin(\alpha_3) \cdot b_3 = 0, \quad (44)$$

a odtud úpravou:

$$B_2 = B_1 \cdot n^{-1} \sqrt{\frac{A_2^n \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{A_1^n \cdot b_1 \cdot \sin(\alpha_1)}}, \quad (45)$$

$$B_3 = B_1 \cdot n^{-1} \sqrt{\frac{A_3^n \cdot b_3 \cdot \sin(\alpha_3)}{A_1^n \cdot b_1 \cdot \sin(\alpha_1)}}. \quad (46)$$

Použitím hodnot velikostí sil B_1, B_2, B_3 vypočtených pomocí optimalizačních metod (lineární, kvadratické, nelineární programování) a dosazením do vztahů odvozených z variačního počtu (Lagrangeovy funkce) zkontrolujeme platnost řešení. Shrňeme-li tedy naše výše uvedená tvrzení, můžeme platnost řešení určit následujícími kroky:

- Zkontrolovat zda řešení optimalizací vyhovuje rovnicím rovnováhy.
- Zkontrolovat zda optimalizační řešení (pro jinou než úlohu lineárního programování) vyhovuje kritériálním rovnicím optimality.

Alternativou k výše uvedenému popsanému numerickému řešení je řešení analytické, ke kterému můžeme využít úpravy výše uvedených vztahů a říci, že:

$$B_1 = \lambda^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left[A_1^n \cdot \frac{\sin(\alpha_1) \cdot b_1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (47)$$

$$B_2 = \lambda^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left[A_2^n \cdot \frac{\sin(\alpha_2) \cdot b_2}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (48)$$

$$B_3 = \lambda^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left[A_3^n \cdot \frac{\sin(\alpha_3) \cdot b_3}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}}. \quad (49)$$

Po dosazení do vztahu (41) a úpravě získáme Lagrangeův multiplikátor:

$$\lambda = \frac{(G \cdot t + W \cdot u)^{n-1}}{\left(\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{A_i^n}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot (\sin(\alpha_i) \cdot b_i)^{\frac{n}{n-1}} \right] \right)^{n-1}}, \quad (50)$$

který bychom následně dosadili do vztahů pro výpočet hodnot velikostí sil B_1, B_2, B_3 . K experimentálnímu ověření, zda formulovaná optimalizace odpovídá reálným podmínkám, musíme porovnat vypočtený odhad svalových sil s určitým experimentálním měřením. Většinou se pro ověření výsledků používá dat změřeného EMG signálu. Výše uvedenými postupy aplikovanými na konkrétní úlohu jsme si ukázali, jak náročné je určit silové poměry ve svalstvu jednotlivých částí těla, neboť se jedná o statisticky neurčitě úlohy řešení, a jak moc jsou výsledky výpočtů závislé na předem definovaných počátečních úvahách, které často vychází pouze z odhadů.

3.4 Silové poměry v rameni

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete na modelu závislost posunu hlavice kosti pažní z jamky na síle působící ve směru podélné osy humeru, a vypočtete velikosti sil v jednotlivých částech modelu.
- 2) Na modelu stanovte poměr sil F_N / F_L , tj. osové síly působící ve směru podélné osy humeru k výslednici přitlačných sil, a jeho průběh v závislosti na výchylce.
- 3) Určete minimální velikosti síly svalů a vazů ramene, aby nedošlo k luxaci ramenního kloubu při známé hmotnosti paže a v ruce drženého závaží.
- 4) Nalezněte minimální velikost síly ve svalech ramene, aby byla zajištěna statická rovnováha, tj. konstantní poloha při abdukci o zadaný úhel, a při známé hmotnosti paže a v ruce drženého závaží.

Teoretický základ řešených úloh

Jedním z nejsložitějších kloubů, z pohledu anatomického a silových účinků v kloubu, je ramenní kloub. Ramenní kloub, articulatio humeri, je kulovitý kloub spojující pažní kost (resp. horní končetinu) s pletencem horní končetiny (resp. lopatkou). Jamka lopatky, která je plochá a menší než hlavice pažní kosti, je při okraji doplněna vazivovým kloubním lemem (labrum glenoidale), který zhruba o jednu třetinu zvětšuje plochu jamky a současně zvětšuje i její hloubku, a tím zvyšuje celkovou stabilitu kloubu. Nejmhutnější je lem na předním okraji jamky, kde je vysoký až 5mm. Přesto se hlavice opírá o jamku jen čtvrtinou až třetinou své plochy; zbytek se opírá o kloubní pouzdro, které zabraňuje vykloubení. Kloubní lem je tvořen velmi hustým a tuhým vazivem, které je pouze u báze nahrazeno vazivovou chrupavkou. Při běžném pohybu není labrum zatěžováno. Má však významnou roli při roztírání synoviální tekutiny uvnitř kloubu. Kloubní pouzdro (capsula articularis) spojuje artikulující kosti po obvodu jejich styčných ploch. Vzhledem k tomu, že má ramenní kloub labrum articulare, pouzdro se upíná na jeho zevním obvodu a kloubní dutina (štěrbinu) tvoří kolem labra výchlipku. Pouzdro je zesilováno šlachami svalů, které jdou kolem kloubu, a kloubními vazy. Vazy v ramenním kloubu tvoří závěs hlavice pažní kosti. Spojení ramenního kloubu je zajištěno především svaly. Úprava chrupavčitého lemu ani existence kloubních vazů však nezajišťuje tuhost kloubu natolik, aby úplný výpadek svalové funkce nezpůsobil v některých případech luxaci hlavice.

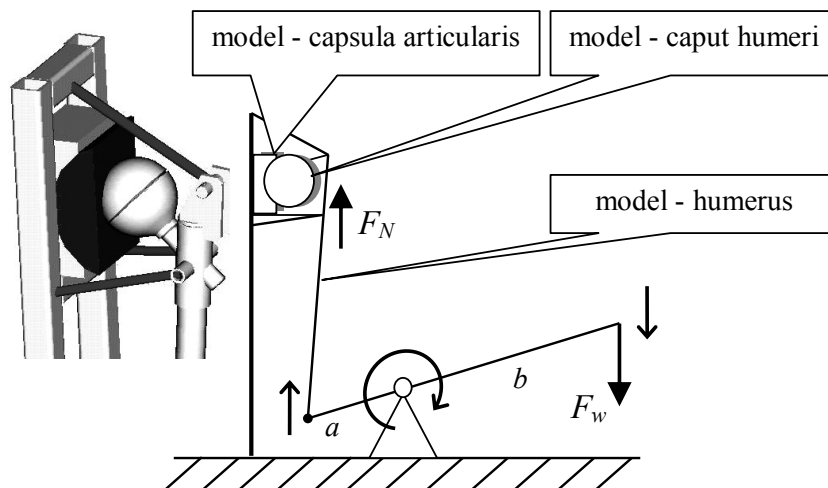
Vzhledem ke složitosti celé soustavy je nutné pro model ramenního kloubu předpokládat výrazná zjednodušení. Může se jednat například o zanedbání kloubního lemu a nahrazení složité struktury vazů a svalů tříbodovým uchycením modelu humeru ke zjednodušenému modelu pletence horní končetiny (cingulum membri superioris). Také je možné na modelu zanedbat viskoelastickou vrstvu chrupavky a její pozitivní účinky na polohu kostní hlavice v kloubu.

Řešení silových poměrů v zjednodušeném modelu ramenního kloubu

Na obr.1. je schematicky znázorněn model simulující možný způsob luxace hlavice pažní kosti. Model umožňuje sledovat závislost posunu hlavice z jamky na působící síle. Je tedy možné studovat závislost velikosti a směru zatěžující síly na velikosti výchylek a prezentovat tuto závislost např. grafem. Ze znalostí rozměrových parametrů a výchylek modelu paže můžeme vypočítat změny délek a síly u všech pružin reprezentujících na modelu vazivové části. A ze znalosti jednotlivých sil je možné určit celkovou přitlačnou sílu.

Uvedený model na obr.1 nám umožňuje demonstrovat, za výše zmíněných velmi zjednodušujících podmínek, podstatu vykloubení ramenního kloubu od axiální síly (normálová síla ve směru podélné osy humeru) přenášené prostřednictvím humeru. Účinek síly způsobující vykloubení ramenního kloubu a sil od vazů a svalů, které naopak brání vykloubení ramenního kloubu, lze schematicky znázornit v rovinné soustavě s respektováním uvedeného zjednodušujícího modelu.

Předpokládejme, že síly působící v ramenním kloubu, dle obr.2 a obr.3, jsou: \vec{F}_N je axiální síla humeru způsobující jeho posun, tj. posun hlavice kosti; \vec{F}_1 je přítláčná síla od horní pružiny $|\vec{F}_1| = k_1 \cdot \Delta l_1$ reprezentující na modelu vazivovou a svalovou přítláčnou sílu; \vec{F}_2 je přítláčná síla od dolních dvou pružin, za předpokladu rovnoběžných os a stejného typu pružin je $|\vec{F}_2| = 2 \cdot (k_2 \cdot \Delta l_2)$, tato síla opět zastupuje vazivovou a svalovou přítláčnou sílu; \vec{F}_{NV} je síla realizující vykloubení; \vec{F}_L je výslednice přítláčných sil; \vec{F}_{LV} je složka výslednice přítláčných sil, která působí proti \vec{F}_{NV} .



Obr.1: Schéma modelu simulace luxace hlavice kosti pažní.

Pro řešení úlohy je možné využít základů vektorové algebry. Pro rovinnou úlohu můžeme napsat složky sil ve směru osy x a y (osy zvoleny v souladu se zemskou souřadnou soustavou, tj. vertikální a horizontální osou). Složky vektoru přítláčné síly horní pružiny jsou:

$$F_{1x} = |\vec{F}_1| \cdot \cos \beta_1, \quad F_{1y} = |\vec{F}_1| \cdot \sin \beta_1. \quad (1)$$

Složky vektoru přítláčné síly od dolních pružin jsou:

$$F_{2x} = |\vec{F}_2| \cdot \cos \beta_2, \quad F_{2y} = |\vec{F}_2| \cdot \sin \beta_2. \quad (2)$$

Složky vektoru celkové přítláčné síly jsou pak určeny součtem odpovídajících složek jednotlivých vektorů:

$$F_{Lx} = F_{1x} + F_{2x}, \quad F_{Ly} = F_{1y} - F_{2y}. \quad (3)$$

Celková velikost síly je pak určena v kartézském prostoru Pythagorovou větou:

$$F_L = \sqrt{F_{Lx}^2 + F_{Ly}^2}. \quad (4)$$

Směr, tj. úhel působení vektoru celkové přítláčné síly, je:

$$\alpha = \arctg \frac{F_{Ly}}{F_{Lx}}. \quad (5)$$

V případě určení velikosti síly realizující pohyb hlavice kloubu ve směru vykloubení, tj. mimo kloubní jamku, budeme vycházet z geometrického rozboru a velikosti osové síly působící v podélné ose humeru, která způsobuje v místě dotyku hlavice a jamky sílu

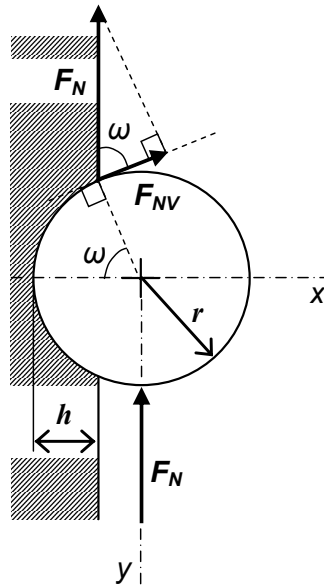
$$|\vec{F}_{NV}| = |\vec{F}_N| \cdot \cos \omega. \quad (6)$$

Vůči této síle musí působit přítláčná síla:

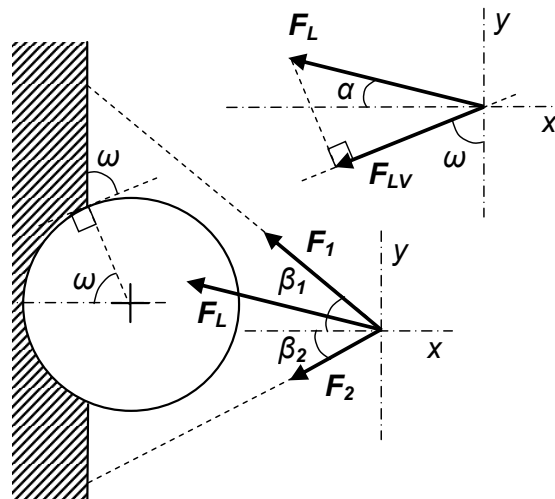
$$|\vec{F}_{LV}| = |\vec{F}_L| \cdot \cos(\alpha + (90 - \omega)). \quad (7)$$

Pokud předpokládáme, že horní končetina bude ve statické rovnováze, můžeme psát podmínku rovnováhy sil $|\vec{F}_{NV}| - |\vec{F}_{LV}| = 0$. Aby nedošlo k vykloubení ramene, tj. aby se hlavice kloubu nedostala mimo kloubní jamku, musí být dodržena podmínka:

$$|\vec{F}_{NV}| \leq |\vec{F}_{LV}|. \quad (8)$$



Obr.2: Účinek síly způsobující vykloubení ve zjednodušeném modelu hlavice ramenního kloubu.



Obr.3: Zjednodušené schéma působení sil od vazů a svalů na modelu hlavice ramenního kloubu.

Zjednodušený popis silového působení ramenních svalů

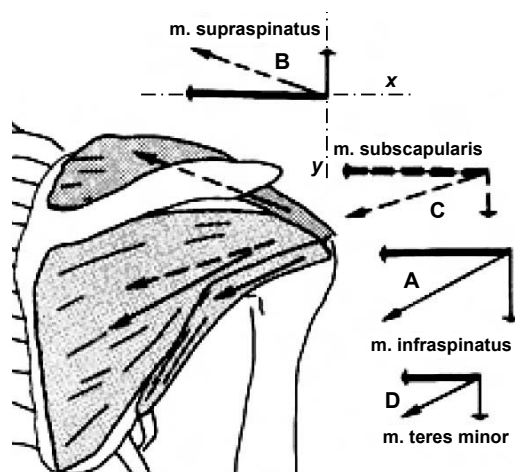
Vzhledem k tomu, že svalstvo tvoří jednu z hlavních částí, která brání luxaci hlavice a určuje stabilitu kloubu, a také vzhledem k tomu, že svalstvo v ramenním kloubu určuje pohybové možnosti horní končetiny, budou v následující části rozebrány silové účinky od hlavních ramenních svalů.

Hlavní úlohou řešení silového působení ramenních svalů je nalezení výslednice sil horních svalů pletence ramenního, neboť ta má zásadní vliv na tuhost ramenního kloubu a také určuje zatížení kloubní hlavice resp. kloubní jamky. Pro zjednodušení předpokládáme, že nositelky jednotlivých sil svalů procházejí středem otáčení kloubu a úlohu řešíme jako rovinnou v sagitální rovině, obr.5.

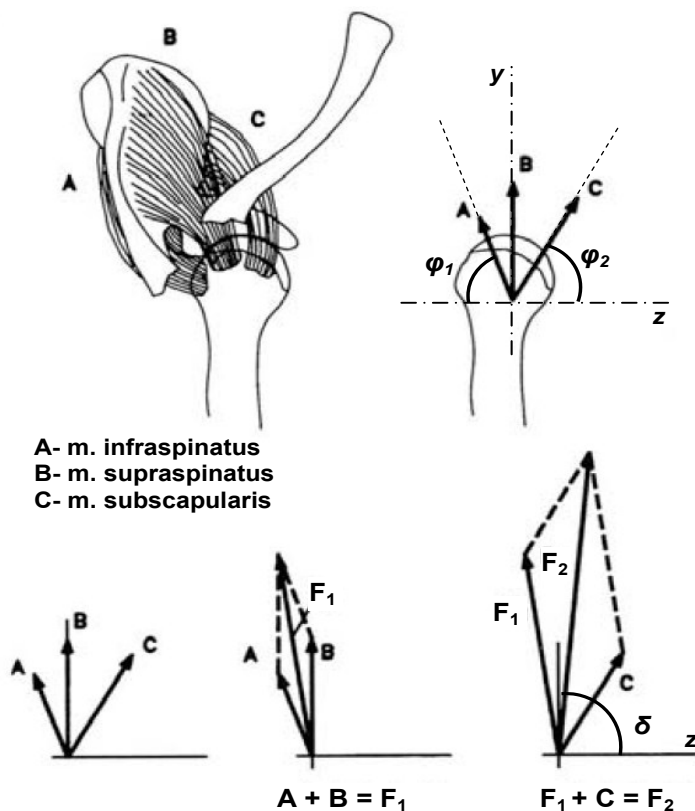
K určení celkové výslednice sil v sagitální rovině (obr.5) je možné využití vektorové algebry. S ohledem na poměry velikostí sil svalů zanedbejme sílu \vec{D} (obr.4), která je generovaná svalem m. teres minor. Pro úlohu skládání sil v sagitální rovině (obr.5) předpokládejme nejprve určení výslednice sil \vec{F}_1 dvojice sil \vec{A} a \vec{B} , kde síla \vec{A} je síla generovaná svalem m. infraspinatus a síla \vec{B} je generována svalem m. supraspinatus. Velikost výsledné síly je postupně určena pomocí složek sil ve směru osy x a y (osy zvoleny v souladu se zemskou souřadnou soustavou, tj. vertikální a horizontální osou), obr.5:

$$F_{1y} = |\vec{B}| + |\vec{A}| \cdot \sin \varphi_1, \quad F_{1z} = |\vec{A}| \cdot \cos \varphi_1, \quad (9)$$

$$F_1 = \sqrt{F_{1y}^2 + F_{1z}^2}. \quad (10)$$



Obr.4: Schéma silového působení hlavních ramenních svalů ve frontální rovině, [4].



Obr.5: Schéma silového působení hlavních horních ramenních svalů v sagitální rovině, [4].

Pro rovinnou úlohu (sagitální rovinu, obr.5) je celková síla svalů horní části ramene určena jako výslednice dvojice sil, tj. síly \vec{F}_1 a síly \vec{C} , což je síla generovaná svalem subscapularis. Postup určení výsledné síly je totožný jako v předchozím případě:

$$F_{2y} = F_{1y} + |\vec{C}| \cdot \sin \varphi_2, \quad F_{2z} = F_{1z} + |\vec{C}| \cdot \cos \varphi_2, \quad (11)$$

$$F_2 = \sqrt{F_{2y}^2 + F_{2z}^2}. \quad (12)$$

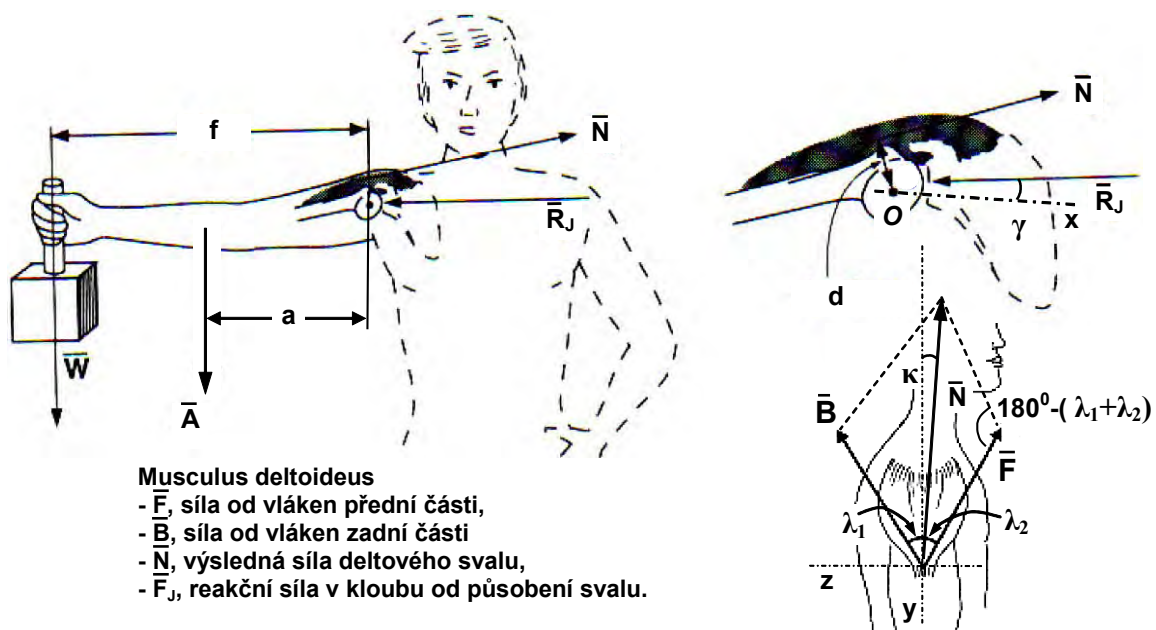
Směr, tj. úhel působení celkové přitlačné síly v sagitální rovině je:

$$\delta = \arctg \frac{F_{2y}}{F_{2z}}. \quad (13)$$

Síly lze samozřejmě také skládat přímo vektorově, přičemž bychom došli ke stejným výsledkům. Také je možné řešit úlohu jako prostorovou, přičemž by uvedené vektory sil, a z toho vyplývající výpočty, byly rozšířeny o třetí rozměr, tj. složku sil ve směru transverzálním (příčném). Uvedená výsledná síla je velmi důležitá z důvodu zachování fixace kloubu a zabraňuje jeho luxaci.

Ramenní kloub je nejstabilnější při abdukci až mírné elevaci. Obecně u volně visící končetiny směřuje většina sil působících na kloub pod kloubní jamku a končetina je proto nestabilní. Velmi důležitým pohybem paže v ramenním kloubu je právě abdukce (odpažení v rozsahu asi 90 stupňů) a elevace (vzpažení). Elevace paže je vlastně pokračováním abdukce nad 90 stupňů. Jde o kombinovaný pohyb, kterého se významně účastní lopatka, rotující po hrudní stěně tak, že dochází k postupné horizontalizaci kloubní jamky. Celý proces abdukce a elevace je fázovaný a složený pohyb. Od 0 do 30 stupňů probíhá pohyb v ramenním kloubu. Od 30 do 170 stupňů připadá na každých 15 stupňů pohybu ramenního kloubu vždy 5 stupňů pohybu v thorakoskapulárním spojení. Tomuto vzájemnému poměru velikosti obou pohybů se říká thorakoskapulární rytmus. Posledních 10 stupňů elevace je provázáno zevní rotací pažní kosti. Na celkové 180 stupňové elevaci paže se tedy ramenní kloub podílí 120 stupni a zbytek pohybu se realizuje v thorakohumerálním spoji.

Hlavním svalem, který se podílí na abdukci a elevaci, je deltový sval (musculus deltoideus), který je největším svalem pletence ramenního. Jeho přední část se podílí také na předpažování, zadní pak na zapažování. Následující část bude pojednávat o silových působeních svalu v případě abdukce resp. elevace. Silové působení svalu lze opět řešit využít vektorové algebry, tentokrát jako prostorovou úlohu.



Obr.6: Schéma silového účinku deltového svalu, [4].

Předpokládejme, že \vec{A} je známá tíha paže, \vec{W} je známá hmotnost závaží a \vec{N} je výsledná síla svalu. Pokud má být soustava v statické rovnováze, tj. úhel elevace paže bude konstantní, musí platit momentová podmínka rovnováhy. Pro bod otáčení O tedy platí:

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0. \quad (14)$$

Pokud je moment síly určen jako vektorový součin vektoru síly a polohového vektoru působišťe síly, pak může psát:

$$\vec{M}_N = \vec{d} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = (d_y \cdot N_z - d_z \cdot N_y) \cdot \vec{i} + (d_z \cdot N_x - d_x \cdot N_z) \cdot \vec{j} + (d_x \cdot N_y - d_y \cdot N_x) \cdot \vec{k} \quad (15)$$

$$\vec{M}_W = \vec{f} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = (f_y \cdot W_z - f_z \cdot W_y) \cdot \vec{i} + (f_z \cdot W_x - f_x \cdot W_z) \cdot \vec{j} + (f_x \cdot W_y - f_y \cdot W_x) \cdot \vec{k} \quad (16)$$

$$\vec{M}_A = \vec{a} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (a_y \cdot A_z - a_z \cdot A_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot A_x - a_x \cdot A_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot A_y - a_y \cdot A_x) \cdot \vec{k} \quad (17)$$

Po stanovení momentů sil budeme definovat momentové podmínku rovnováhy pro tři směry v 3D soustavě:

$$(d_y \cdot N_z - d_z \cdot N_y) + (f_y \cdot W_z - f_z \cdot W_y) + (a_y \cdot A_z - a_z \cdot A_y) = 0, \quad (18)$$

$$(d_z \cdot N_x - d_x \cdot N_z) + (f_z \cdot W_x - f_x \cdot W_z) + (a_z \cdot A_x - a_x \cdot A_z) = 0, \quad (19)$$

$$(d_x \cdot N_y - d_y \cdot N_x) + (f_x \cdot W_y - f_y \cdot W_x) + (a_x \cdot A_y - a_y \cdot A_x) = 0. \quad (20)$$

Z výše uvedených rovnic momentové podmínky rovnováhy lze určit neznámé složky N_x , N_y , N_z . Velikost vektoru výsledné síly, která je generována deltovým svalem, je určena vztahem:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}. \quad (21)$$

Směr, tj. úhel působení této síly v rovině y - z (sagitální rovině), je:

$$\kappa = \arctg \frac{N_z}{N_y}. \quad (22)$$

Za předpokladu známých geometrických parametrů můžeme rozkladem v souřadnicích, jak již bylo ukázáno v předchozích příkladech, nebo pomocí sinové věty určit silové účinky v přední části deltového svalu, která se také podílí na předpažování a v zadní části, která se podílí na zapažování:

$$\frac{N}{\sin(180 - (\lambda_1 + \lambda_2))} = \frac{B}{\sin(\lambda_2 - \kappa)} \Rightarrow B = \frac{N}{\sin(180 - (\lambda_1 + \lambda_2))} \cdot \sin(\lambda_2 - \kappa) \quad (23)$$

$$\frac{N}{\sin(180 - (\lambda_1 + \lambda_2))} = \frac{F}{\sin(\lambda_1 + \kappa)} \Rightarrow F = \frac{N}{\sin(180 - (\lambda_1 + \lambda_2))} \cdot \sin(\lambda_1 + \kappa). \quad (24)$$

Reakční sílu v kloubní hlavici R_J je možné určit z podmínky rovnováhy sil, tedy:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0. \quad (25)$$

Dosažením konkrétních hodnot složek vektorů sil získáme rovnice

$$W_x + A_x + N_x + R_{Jx} = 0 \Rightarrow R_{Jx} = -(W_x + A_x + N_x), \quad (26)$$

$$W_y + A_y + N_y + R_{Jy} = 0 \Rightarrow R_{Jy} = -(W_y + A_y + N_y), \quad (27)$$

$$W_z + A_z + N_z + R_{Jz} = 0 \Rightarrow R_{Jz} = -(W_z + A_z + N_z). \quad (28)$$

a odvodili jsme složky vektoru výsledné reakční síly. Velikost vektoru výsledné reakční síly v kloubní hlavici je:

$$R_J = \sqrt{R_{Jx}^2 + R_{Jy}^2 + R_{Jz}^2}. \quad (29)$$

Směr, tj. úhly působení této síly vůči definovanému souřadnému systému ramene jsou:

$$\gamma_x = \arctg \frac{R_{Jy}}{R_{Jz}}, \quad \gamma_y = \arctg \frac{R_{Jz}}{R_{Jx}}, \quad \gamma_z = \arctg \frac{R_{Jy}}{R_{Jx}}. \quad (30)$$

Problém nalezení vektoru výsledné síly resp. reakční síly je samozřejmě také možné řešit přímo redukcí na rovinnou úlohu. Uvedenou úlohou jsme zjistili jak silový účinek deltového svalu, který odpovídá hlavnímu silovému účinku v rámci ramenního pletence, tak reakční účinek v kloubu.

Velikost a směr celkové síly hlavních svalů horní části pletence ramenního, za zjednodušeného předpokladu nositelek procházejících středem otáčení kloubu, tj. svalů infraspinatus, supraspinatus, subscapularis a musculus deltoideus, bychom opět zjistili vektorovým součtem výše uvedených vektorů sil, resp. součtem odpovídajících složek jednotlivých vektorů. Odtud také zjistíme celkový reakční účinek v kloubu od všech hlavních svalů pletence ramenního. Dodejme, že jsme v úlohách neuvažovali menší svaly teres major a teres minor, které také tvoří pletenec ramenní, ale silovým účinkem se na realizaci elevace, resp. abdukce účastní minimálně.

3.5 Zatížení segmentů dolní končetiny při chůzi

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Vypočtete hmotnosti a momenty setrvačnosti segmentů dolní končetiny.
- 2) Určete translační a úhlová zrychlení vybraných segmentů dolní končetiny pro švihovou a stojnou fázi kroků chůze.
- 3) Určete velikosti sil a momentů v kotníku a koleni při chůzi pro švihovou a stojnou fázi kroků chůze.

Teoretický základ řešených úloh

Síla je obecně definována druhým Newtonovým zákonem síly jako součin zrychlení a hmotnosti hmotného tělesa:

$$\vec{F}_{v,i} = m_i \cdot \vec{a}_{v,i}, \quad (1)$$

tj. pro směr x a y u rovinné úlohy

$$F_{vx,i} = m_i \cdot a_{vx,i}, \quad F_{vy,i} = m_i \cdot a_{vy,i}. \quad (2)$$

Pro další řešení využijeme předpokladů z dynamiky pohybu hmotných těles. V dynamice řešíme dva druhy úloh. Úloha 1. druhu, tzv. kinetostatická či inverzní dynamická, se využívá k určení velikosti síly potřebné k dosažení požadovaného či známého pohybu, např. známe změřené zrychlení a zajímá nás velikost síly. Úloha 2. druhu, tzv. dynamická či dopředná dynamická, vychází z předpokladu známé síly a určujeme velikost zrychlení, obvykle sílu zjistíme např. dynamometrem. Využitím např. sledovacích či inerciálních systémů měření pohybu můžeme tedy dle úlohy 1. druhu nalézt velikosti silových účinků působících na segmenty těla.

Pro řešení těchto úloh je základem dynamiky zmíněný druhý Newtonův zákon, zákon síly resp. pohybová rovnice. Základní pohybová rovnice určuje vztah mezi silami působícími na hmotný objekt a pohybem, který je těmito silami způsobený.

$$m_i \cdot \vec{a}_{v,i} = \sum \vec{F}_i \quad (3)$$

K řešení úlohy můžeme také využít alternativní způsob sestavení pohybové rovnice, který nabídl Jean Le Rond d'Alembert. Součin hmotnosti a zrychlení převedeme na opačnou stranu rovnice. Takto vzniklá rovnice má formálně charakter rovnice rovnováhy. Tomuto postupu říkáme d'Alembertův princip. Zavedeme tzv. d'Alembertovu sílu (\vec{D}), její velikost je rovna součinu hmotnosti a zrychlení, a její směr je opačný, než je směr zrychlení. Po této úpravě bude silová soustava vnějších sil, doplněná o d'Alembertovu sílu, v rovnováze. D'Alembertova síla, tzv. dynamická či doplňková síla, je setrvačná síla, která působí proti směru zrychlení, a její velikost je rovna součinu hmotnosti a zrychlení. Rovnováhu vyjádříme rovnicemi rovnováhy pro translační pohyb:

$$\sum \vec{F}_i + (-m_i \cdot \vec{a}_{v,i}) = \sum \vec{F}_i + \vec{D}_i = 0, \quad (4)$$

analogickým postupem bychom sestavili rovnici také pro rotační pohyb. K řešení úlohy dynamiky tedy můžeme využít dva způsoby a to buď přímý (Newtonův) způsob sestavení pohybové rovnice nebo d'Alembertův princip. Oba tyto postupy jsou správné, ale nesmí se navzájem kombinovat.

Při znalosti hmotností segmentů a jejich zrychlení můžeme určit síly na segmenty působící, resp. síly působící v kloubech spojujících segmenty.

Nalezení antropometrických údajů segmentů těla

Abychom mohli vypočítat sílu, musíme určit hmotnost segmentu. Metoda určení hmotnosti využívá experimentálně stanovených koeficientů B_{0i} , B_{1i} a B_{2i} pro každý segment. Pro vyjádření hmotnosti daného segmentu pak platí vícenásobná regresní rovnice

$$m_i = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v, \quad (5)$$

kde m (kg) je hmotnost a v (cm) výška jedince. Odtud můžeme určit setrvačnou sílu segmentů

$$\vec{F}_{v,i} = m_i \cdot \vec{a}_{v,i}. \quad (6)$$

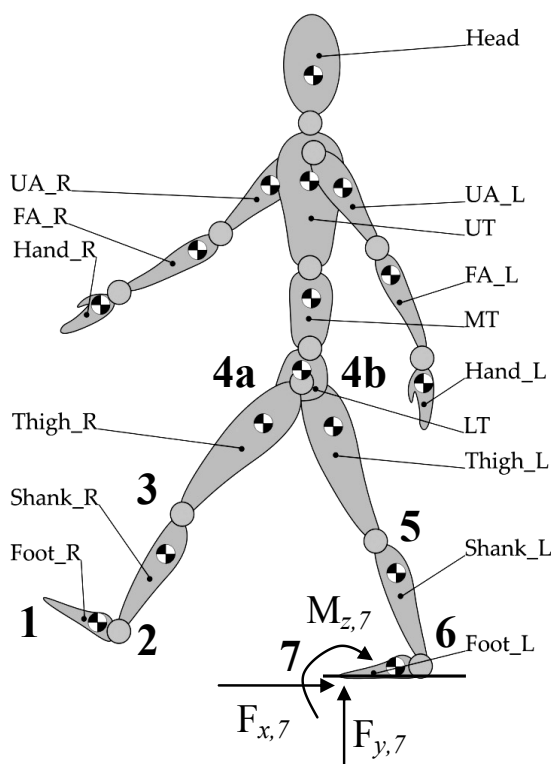
Obdobně můžeme určit velikost momentu síly daného momentem setrvačnosti hmotného segmentu a jeho úhlovým zrychlením:

$$\vec{M}_{v,i} = I_i \cdot \vec{\epsilon}_{v,i}, \quad \text{tj. pro rotaci kolem osy } z \quad M_{vz,i} = I_{vz,i} \cdot \epsilon_{vz,i}. \quad (7)$$

Pro určení momentu setrvačnosti I_i jednotlivých částí těla používáme antropometrické údaje uvažovaných segmentů. Běžně jsou pro určení používány opět tabulky hodnot. Moment setrvačnosti segmentu těla určíme na základě znalosti celkové hmotnosti m (kg) a výšky jedince v (cm) vícenásobnou regresní rovnicí:

$$I_i = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v \quad (8)$$

Výše uvedené koeficienty B_{0i}, B_{1i}, B_{2i} jsou stanoveny experimentálně na „průměrnou“ populaci.



Obr.1: Rozdělení těla na segmenty s označením kloubů dolních končetin a jejich konců při došlapu tvořících vazbu s podložkou.

Tělo figuranta je rozděleno na jednotlivé segmenty, které na sebe navzájem působí skrze body dotyku, obr.1, akcí a reakcí (po zjednodušení na špičce nohy akcí a reakcí podložky, v ostatních případech bude působit akce a reakce skrze klouby). Pokud je špička nohy mimo kontakt s podložkou, jsou síly a moment přenášeny od podložky do chodidla nulové. Pokud se noha dotýká podložky, působí zde reakce, která je dána typem vazby. Pro jednoduchý výpočet posuneme působíště reakcí na špičku nohy a zavedeme vodorovnou a svislou reakční sílu a reakční moment. Abychom mohly určit velikostí sil a momentů v kloubech, budeme předpokládat výpočet podle podmínky rovnováhy dle d’Alembertova principu, tj. vnější síly a momenty, setrvačné síly a momenty jsou v rovnováze. Na obrázku č. 1 jsou uvedeny segmenty, pro které píšeme podmínky rovnováhy podle d’Alembertova principu. Pro zjednodušení předpokládáme rovinou úlohu (sagitální rovinu), v které se nám počet šesti pohybových rovnic 3D prostoru (3 silové a 3 momentové) snížil na tři rovnice 2D prostoru (2 silové a 1 momentová).

Vstupní hodnoty pro výpočet jsou tedy hmotnosti pro všechny segmenty m_i , momenty setrvačnosti I_i (pro 2D úlohu k ose kolmé na sledovanou rovinu, v našem případě sagitální rovinu), délky segmentů l_i (tj. např. vzdálenost detekovaných značek umístěných na kloubech, obr.1), polohy těžišť a_i , $b_i = l_i - a_i$ (od začátku a konce segmentu, které jsou definovány kloubními spojeními). Pro výpočet délek segmentů je možné využít experimentálně zjištěných tabulkových koeficientů ve vícenásobné regresní rovnici:

$$l_i = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v, \quad (9)$$

nebo je možné délky segmentů přímo změřit na měřeném subjektu. Po zjištění délek segmentů můžeme určit přibližnou polohu těžiště segmentů. Předpokládejme, že poloha těžiště pro vybrané segmenty je takováto:

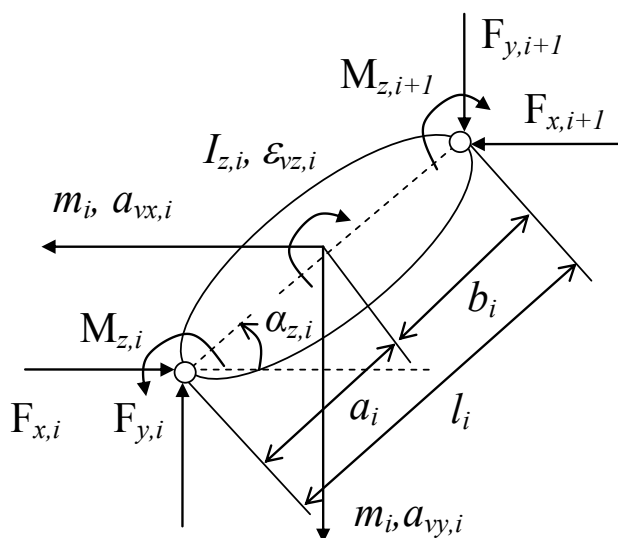
- trup: 42% (měřeno od ramenního kloubu) a 58%,
- stehno: 43% a 57%,
- bércec: 41% a 59 % celkové délky segmentu.
- Těžiště nohy leží v těžišti trojúhelníku, který je vymezen krajními body chodidla a středem hlezenního kloubu.

Příčemž vždy první hodnota representuje vzdálenost těžiště od proximálního konce (tj. blíže středu těla, trupu) v procentech z celkové délky konkrétního segmentu. To jest např. výpočet polohy těžiště stehna pravé dolní končetiny (dle obr.1 a obr.2) Obr.1:

$$a_{Thigh_R} = 0,57 \cdot l_{Thigh_R}, \quad (10)$$

$$b_{Thigh_R} = 0,43 \cdot l_{Thigh_R}. \quad (11)$$

Po zjištění všech antropometrických charakteristik jednotlivých segmentů dolní končetiny využijeme těchto charakteristik k určení sil a momentů v kloubních spojeních segmentů. Pro zjednodušení úlohy zanedbáme kývání trupu a rukou, tj. budeme uvažovat pro horní polovinu těla existenci pouze svislé setrvačné resp. tíhové síly. Podle obr.1 jsou ve všech bodech, tj. kloubech těla a na koncích nohou, neznámé $F_{x,i}$, $F_{y,i}$, $M_{z,i}$, tj. vnitřní reakce v kloubech a reakce podložky (v podobě momentu a dvou na sebe kolmých složek vektoru síly). Každá vazba dvou segmentů může tedy přenášet, za předpokladu rovinné úlohy, dvě na sebe kolmé síly a jeden moment.



Obr.2: Schéma sil a momentů působících podle d'Alembertova principu na i-tý segment.

Určení sil a momentů sil v kloubních spojeních segmentů těla

Podle obr.2 můžeme napsat podmínky rovnováhy podle d'Alembertova principu pro segmenty dolní končetiny, tj. jedná se o součtové silové podmínky a momentovou podmínku rovnováhy. Pro obecný i-tý segment v rovinné úloze můžeme psát pohybové rovnice:

$$m_i \cdot a_{vx,i} - F_{x,i} + F_{x,i+1} = 0 \quad (12)$$

$$m_i \cdot a_{vy,i} - F_{y,i} + F_{y,i+1} + m_i \cdot g = 0 \quad (13)$$

$$I_{z,i} \cdot \varepsilon_{vz,i} - (F_{x,i} \cdot a_i + F_{x,i+1} \cdot b_i) \cdot \sin \alpha_{z,i} + (F_{y,i} \cdot a_i + F_{y,i+1} \cdot b_i) \cdot \cos \alpha_{z,i} - M_{z,i} + M_{z,i+1} = 0 \quad (14)$$

Zrychlení segmentů $a_{vx,i}$, $a_{vy,i}$ a $\varepsilon_{vz,i}$ se vztahují k těžišti segmentu a ne k měřeným bodům (markerům) umístěným na segmentech těla během měření MoCap systémem, přičemž je poloha těchto markerů obvykle definována začátkem a koncem segmentu v kloubních spojeních (např. holenní část kolenem a kotníkem). Z tohoto důvodu musíme uvedená zrychlení dopočítat z rozměrových parametrů segmentů a změřených zrychlení markerů ve vodorovném a svislém směru pomocí MoCap systému:

$$a_{vx,i} = a_{x,i} + \frac{a_{x,i+1} - a_{x,i}}{l_i} \cdot a_i, \quad (15)$$

$$a_{vy,i} = a_{y,i} + \frac{a_{y,i+1} - a_{y,i}}{l_i} \cdot a_i, \quad (16)$$

$$\varepsilon = \frac{a_{y,i} - a_{y,i-1}}{l_i \cdot \cos \alpha_i} - \frac{a_{x,i} - a_{x,i-1}}{l_i \cdot \sin \alpha_i}. \quad (17)$$

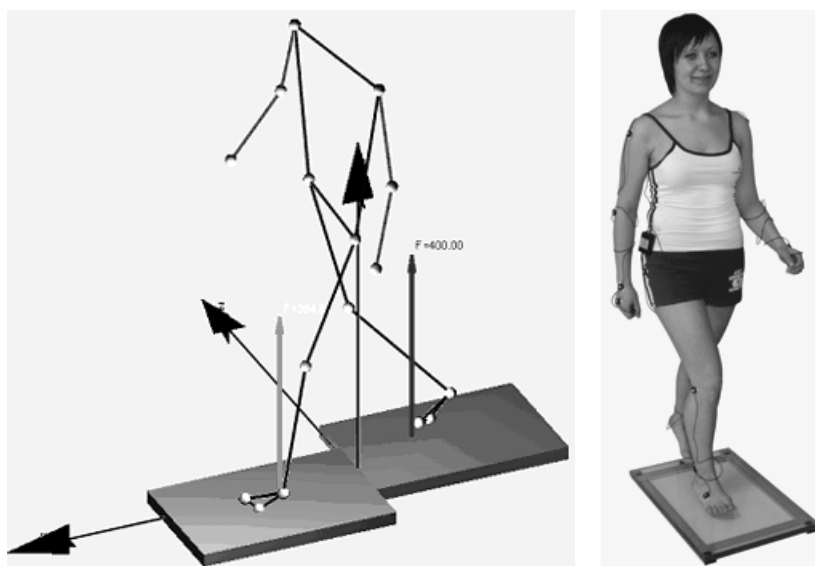
V místě pravého stehenního segmentu (obr.1, Thigh_R) a levého stehenního segmentu (obr.1, Thigh_L) platí podle zjednodušujících předpokladů a svislé součtové podmínky rovnováhy trupu:

$$F_{y,4a} - F_{y,4b} + m_{UP} \cdot (a_{vy,UP} + g) = 0, \quad (18)$$

kde m_{UP} je hmotnost horní části těla tvořená sumou hmotností segmentů horní částí těla, $\vec{a}_{vy,UP}$ je zrychlení/zpomalení horní částí těla ve svislém směru.

Celkový počet rovnic podmínek rovnováhy je pro všech šest segmentů dolní končetiny a trup: $6 \times 3 + 1 = 19$. Neznámých momentů a sil je také 19, úloha je tedy řešitelná. Vhodné je řešit úlohu od konce nohy, která není v kontaktu s podložkou, tj. volíme $F_{x,1} = F_{y,1} = M_{z,1} = 0$, pak v každé rovnici je pouze jedna neznámá síly. Momenty sil jsou počítány až po určení sil.

Pokud jsou obě nohy v kontaktu s podložkou, je nutné určit také $F_{x,1}$, $F_{y,1}$, $M_{z,1}$. Pokud sestavíme podmínky rovnováhy podle d'Alembertova principu pro celé tělo, tj. všechny segmenty dolní části těla, je celkový počet neznámých veličin větší, než je celkový počet rovnic. Jedná se o „neurčitou“ úlohu, a tudíž je nutné zavést zjednodušující předpoklady nebo některé neznámé veličiny zjistit z jiné teorie či jiným měřením. Úlohu je možné zjednodušit tak, že přeneseme působíště reakčních sil v bodech 1 a 7 do těžiště chodidla a tímto odpadnou dva neznámé momenty, neboť reakční síly nebudou vytvářet v těžišti moment. Dále pro zjednodušení můžeme předpokládat, že budou reakce v bodech 1 a 7 shodné. Také se nabízí možnost určovat a analyzovat polohu těžiště celého těla v prostoru a z této informace určovat rozložení sil na obě nohy a následně na podložku, dle polohy těžiště celého těla směrem k levé či pravé dolní končetině. K zjištění sil pod chodidly také můžeme použít dynamometrické desky (např. firmy Kistler), které snímají a zaznamenávají okamžité velikosti sil či tlaků od chodidel na desku, po které se pacient pohybuje.



Obr.3: Snímání sil, pod chodidly během chůze, dynamometrickou deskou paralelně s MoCap sledovacím systémem, (převzato z návodu k použití kamerového systému firmy Lukotronic).

3.6 Silové poměry v koleni

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Teoreticky stanovte sílu quadricepsu v případě, že bude v místě kyčelního kloubu hmotnost přenášená na femur 10kg a úhel mezi stehnem a lýtkem bude 90° (femur vs. tibie).
- 2) Na modelu experimentálně nalezněte úpony quadricepsu a porovnejte tyto hodnoty s naměřenými a teoretickými hodnotami. Obdobně zjistěte úpony quadricepsu na vašem těle.
- 3) Experimentálně na vlastní noze odhadněte průřez vašeho quadricepsu a teoreticky stanovte maximální možnou sílu, kterou může vytvořit.
- 4) Stanovte potřebnou sílu svalů k zachování vámi zvolené statické polohy v podřepu.
- 5) Nalezněte velikost síly, kterou by měly vytvářet svaly vašeho těla při extenzi v koleni zvoleným úhlovým zrychlením.
- 6) Stanovte minimální rozměry menisků ve vašem koleni, aby nedošlo k předčasné artróze.

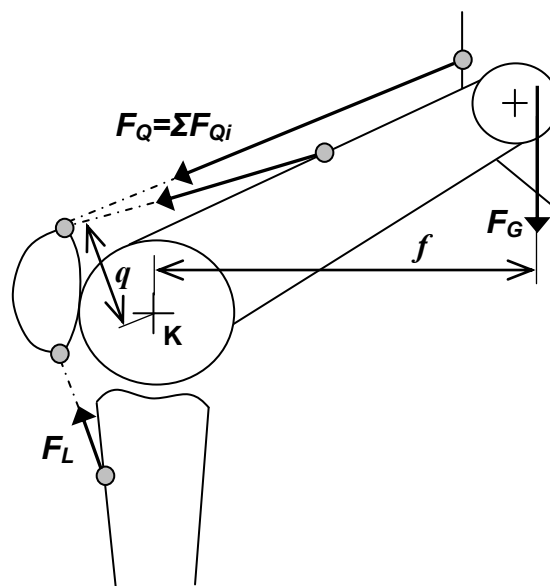
Teoretický základ řešených úloh

Kolenní kloub patří k nejvíce namáhaným kloubům těla, z tohoto důvodu je důležité studium silových poměrů v tomto kloubu. Kolenní kloub, art. genus je složený a největší kloub v těle. Artikulují zde tři kosti: femur, tibia a patella. Kloub umožňuje pohyb dolní části nohy a tím chůzi, a z tohoto důvodu je pohyb v koleni často studován v biomechanice pohybu. Dalším důvodem zájmu o tento kloub je, že je vystaven velké zátěži. Velké zatížení může často skončit i úrazem. Následné léčení je velmi náročné a zdlouhavé a často vede k trvalému poškození kloubu.

Pro objasnění vybraných silových poměrů nejprve předpokládejme model, na kterém bude statická rovnováha zajištěna extenzory v koleni, Obr.1. Hlavní pohyb kolene probíhá v sagitální rovině, je možné tedy řešit za zjednodušujících předpokladů pouze rovinnou úlohu. Aby byl jakýkoliv segment těla v rovnováze, musí splňovat dvě základní podmínky:

- celkový součet všech sil působících na segment je nulový,
- celkový součet všech momentů sil působících na segment je nulový.

Síly i momenty jsou vektory, při řešení tedy musíme uvažovat nejen jejich velikost, ale také směr sil a smysl předpokládaného otáčení způsobeného momenty sil.



Obr.1: Zjednodušené schéma silových poměrů na na tibiofemorální části s uvážením extenzorů kolene.

Řešení silových poměrů v zjednodušeném modelu dolní končetiny

Pro soustavu segmentů resp. femur (Obr.1), který bude uveden do statické rovnováhy, musí platit momentová podmínka rovnováhy:

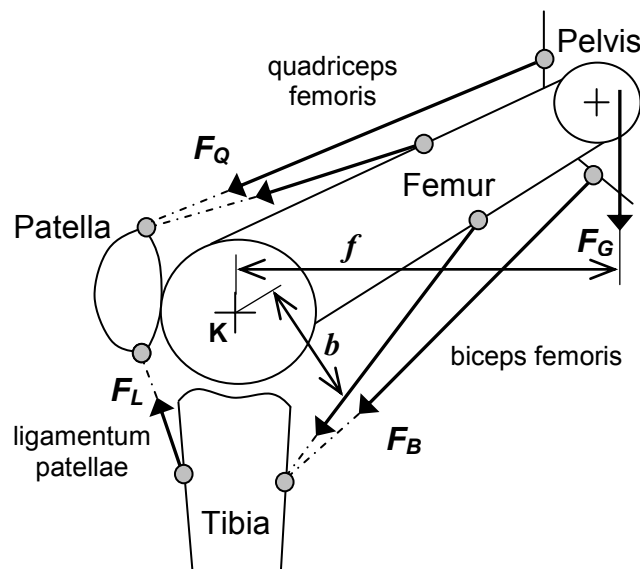
$$q \cdot \sum F_{Qi} - f \cdot F_G = 0 \Rightarrow q \cdot \sum F_{Qi} = f \cdot F_G, \quad (1)$$

kde q je vzdálenost mezi středem otáčení v kolenním kloubu (v bodě K) a nositelkou výsledné síly od extenzorů kolene, která je dána sumou všech sil od jednotlivých svalů $F_Q = \sum F_{Qi}$. Suma těchto sil je přenášena na patellu šlachou. Vzdálenost f je vzdálenost mezi středem otáčení v kolenním kloubu a nositelkou tíhové síly těla, která prochází těžištěm těla. Odtud může být vyjádřena výsledná generovaná síla ve svalech, pro statickou úlohu:

$$F_Q = \sum F_{Qi} = \frac{F_G \cdot f}{q}. \quad (2)$$

Velikost síly F_Q je dána velikostí svalů tj. svalové tkáně, bylo změřeno, že 1cm^2 (příčný průřez svalu v relaxovaném stavu) může generovat přibližně 50N. K zjištění příčného průřezu nejdůležitějšího extenzoru, M. quadriceps femoris, je zapotřebí změřit největší možný obvod stehna a to v pozici podřepu. M. quadriceps femoris zabírá cca 40 % plochy řezu stehna. Síla svalu F_Q je přenášena šlachou čtyřhlavého stehenního svalu na patellu, na kterou navazuje vaz lig. patellae, kterým se připojuje na drsnatinu tibie, do které je síla od stehenních svalů nakonec přenesena a tedy $F_Q = F_L$, obr.2.

Uvedený model reprezentuje pouze extenzory kolenního kloubu. Model pro řešení rovinné úlohy silových poměrů dolní končetiny můžeme dále rozšířit o silové účinky od flexorů kolene, Obr.2.



Obr.2: Zjednodušené schéma silových poměrů na tibiofemorální části s uvažováním extenzorů a flexorů kolene.

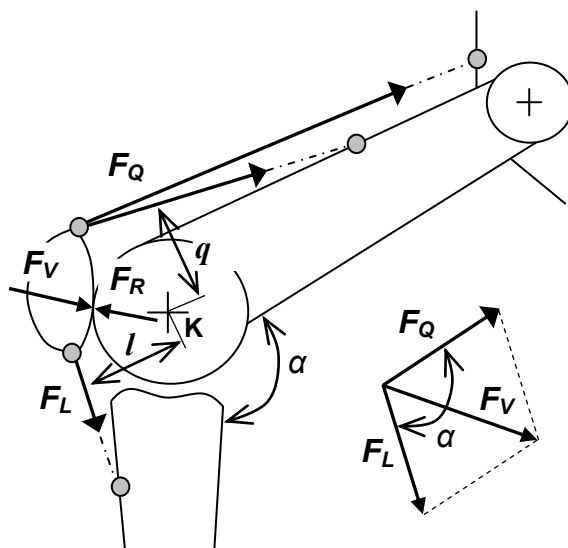
Předpokládejme, že se zjednodušený model bude vztahovat k popisu silových poměrů tibiofemorální části těla, které se nachází v podřepu, např. v případě lyžaře na lyžích atp. Pro statický postoj těla, a tedy soustavu segmentů, tj. konkrétně femur (obr.2), můžeme psát momentovou podmínku rovnováhy:

$$q \cdot F_Q - f \cdot F_G - b \cdot F_B = 0 \Rightarrow q \cdot F_Q = f \cdot F_G + b \cdot F_B, \quad (3)$$

kde b je vzdálenost mezi středem otáčení v kolenním kloubu a nositelkou výsledné síly, která je dána sumou sil svalů $F_B = \sum F_{Bi}$ realizujících flexi v koleni. Síly od flexorů kolene jsou přenášeny na tibii a fibulu. Femur je tedy uveden do rovnováhy silami od extenzorů (M. quadriceps

femoris, atp.) a flexorů (M. biceps femoris, atd.). Uvedený model statického stavu platí například pro lyžaře se zafixovanou tibii v hlezenním kloubu.

V případě studia silových poměrů v dolní končetině je také nutné uvažovat vlastní zatížení kolenního kloubu mezi dvěma nejdelšími kostmi v lidském těle, kde lze očekávat vznik velkého namáhání této části. Silové poměry v patelofemorálním kloubu můžeme znázornit schématem na Obr.3.



Obr.3: Silové poměry v patelofemorální části.

Dle schématu popisujícího silové poměry na patelle a za předpokladu zjednodušení můžeme napsat pro rovinnou úlohu předpokládající statickou rovnováhu, že:

$$l \cdot F_L - q \cdot F_Q = 0 \Rightarrow l \cdot F_L = q \cdot F_Q \Rightarrow l = q \Rightarrow F_L = F_Q. \quad (4)$$

Velikost výslednice sil $F_V = F_L + F_Q$ můžeme určit rozkladem v souřadnicích nebo pomocí kosinové věty:

$$F_V^2 = F_L^2 + F_Q^2 - 2 \cdot F_L \cdot F_Q \cdot \cos(180^\circ - \alpha). \quad (5)$$

Reakční síla působící od femuru na patellu je pak dána ze silové podmínky rovnováhy, resp. třetího Newtonova zákona, vztahem:

$$F_V - F_R = 0 \Rightarrow F_R = F_V.$$

Určení vybraných silových poměrů dolní končetiny pohybujícího se těla

Výše uvedené zjednodušené řešení uvažovalo statickou rovnováhu segmentů těla, v případě řešení reálné biomechanické soustavy je vhodné pro řešení použít dynamickou analýzu. Dynamika obecně pojednává o pohybu hmotných útvarů v prostoru a čase a akceptuje silové působení. Někdy se pro dynamiku v biomechanice užívá název biodynamika, nebo kinetika. V úloze již nemůžeme uvažovat pouze statickou rovnováhu sil a momentů, ale musíme uvažovat také dynamiku pohybu. Takováto úloha respektuje např. situaci pádů, doskoků, atp., kdy dynamické síly mnohonásobně překračují síly statické. Při analýze pohybu tělesa se využívá pohybových rovnic. Předpokládejme, že točivý moment M_d v kloubu je určen vztahem,

$$M_d = l \cdot F_L - q \cdot F_Q, \quad (6)$$

kde F_Q a F_L jsou opět síly svalů zajišťujících extenzi a flexi v kolenní, q a l jsou kolmé vzdálenosti nositelů výsledných působících sil svalů od středu otáčení kloubu. Točivý moment v kloubu M_d lze však také určit ze znalosti hmotného momentu setrvačnosti I_t a úhlového zrychlení ε v kolenním kloubu, které lze měřit např. MoCap systémy, tj. pohybová rovnice rotačního pohybu má tvar:

$$M_d - I_t \cdot \varepsilon = 0 \Rightarrow M_d = I_t \cdot \varepsilon. \quad (7)$$

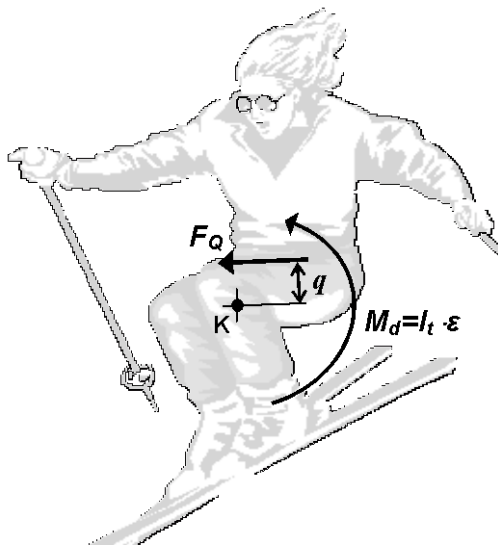
Pro zjednodušení předpokládejme $l \cdot F_L = 0$, což by odpovídalo situaci lyžaře při odrazu či doskoku, kde působí při těchto fázích pohybu hlavně extenzory. Ze znalosti definice momentu otáčení pak můžeme psát pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb:

$$I_t \cdot \varepsilon = q \cdot F_Q, \quad (8)$$

a odtud můžeme určit velikost sumy neznámých sil $F_Q = \sum F_{Q_i}$, kterou musí působit svaly dolní končetiny k realizaci úhlového zrychlení či zpomalení ε v kolenním kloubu:

$$F_Q = \frac{I_t \cdot \varepsilon}{q}. \quad (9)$$

Přičemž lze předpokládat, že se určená velikost síly, k realizaci úhlového zrychlení ε v kolenním kloubu, bude rozkládat na obě nohy v souladu s tím, do jaké míry se bude svalstvo obou nohou účastnit realizace pohybu.



Obr.4: Příklad působení quadriceps femoris při pohybu lyžaře.

Nechť je hmotný moment setrvačnosti určen vztahem zohledňujícím skutečnost, že je lidské tělo složeno z řady hmotných segmentů, jejichž těžiště neprochází osou otáčení. Osa rotace v našem případě prochází kolenním kloubem kolmo na sagitální rovinu, a celkový moment setrvačnosti s využitím Steinerovy věty je:

$$I_t = \sum_i^n I_{ti} + \sum_i^n m_i \cdot d_i^2, \quad (10)$$

kde I_{ti} je moment setrvačnosti konkrétního segmentu těla vzhledem k jeho těžišti, resp. ose otáčení procházející těžištěm segmentu, m_i je hmotnost segmentu a d_i je vzdálenost skutečné osy rotace (v kolenním kloubu) od těžiště segmentu.

Pro určení hmotného momentu setrvačnosti I_{ti} jednotlivých částí těla používáme obvykle výpočet založený na antropometrických údajích. Běžně jsou používány pro výpočet tabulky, které obsahují experimentálně určené hodnoty. Pro nás je důležité nejprve určit hodnoty momentů setrvačnosti jednotlivých segmentů lidského těla vzhledem k osám procházejícím těžišti segmentů a kolmým na sagitální rovinu. Moment setrvačnosti segmentu těla určíme na základě znalosti celkové hmotnosti m (kg) a výšky jedince v (cm) vícenásobnou regresní rovnicí:

$$I_{ti} = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v. \quad (11)$$

Výše uvedené koeficienty B_{0i}, B_{1i}, B_{2i} jsou stanoveny experimentálně, mají stochastický charakter a jejich použití na „průměrnou“ populaci je tedy provedeno s jistou pravděpodobností a zatíženo

určitou chybou měření. Dalším problémem, který je nutné uvážit s ohledem na relevantnost vypočtených dat, je, že se experimentální koeficienty liší dle populace, kterou autoři (Zatsiorsky, Bohn, Shan a další) studovali. Z tohoto důvodu je vhodné použít ve výpočtu koeficienty podle typu populace, ze které studovaná osoba pochází.

Hmotnost segmentů těla lze určit na základě znalosti celkové hmotnosti a výšky jedince dvěma užívanými postupy. Méně přesný postup vychází ze znalosti procentuálního rozdělení celkové hmotnosti, publikované výsledky jednotlivých autorů se však značně liší. Přesnější je metoda opět založená na experimentálně stanovených koeficientech B_{0i} , B_{1i} a B_{2i} pro každý segment. Pro vyjádření hmotnosti daného segmentu pak platí vícenásobná regresní rovnice:

$$m_i = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v. \quad (12)$$

K přesnému zjišťování hmotností konkrétního jedince lze použít i jiné antropometrické postupy (např. podvodní vážení s použitím Archimédova zákona).

Polohy těžišť segmentů těla jsou opět stanoveny experimentálně. Pro výpočet polohy těžiště segmentů je možné využít experimentálně zjištěných tabulkových koeficientů ve vícenásobné regresní rovnici:

$$d_i = B_{0i} + B_{1i} \cdot m + B_{2i} \cdot v. \quad (13)$$

Také můžeme určit přibližné polohy těžišť segmentů z předpokladů, že:

- ruka: 39% a 61%,
- předloktí: 43% a 57%,
- nadloktí: 44% a 56%,
- hlava a krk: 50% a 50%,
- trup: 42% (měřeno od ramenního kloubu) a 58%,
- stehno: 43% a 57%,
- bérec: 41% a 59 % celkové délky segmentu.
- Těžiště nohy leží v těžišti trojúhelníku, který je vymezen krajními body chodidla a středem hlezenního kloubu.

Přičemž vždy první hodnota reprezentuje vzdálenost těžiště od proximálního konce (tj. blíže středu těla, trupu) v procentech z celkové délky konkrétního segmentu. Polohu celkového těžiště těla lze v případě potřeby určit z výpočtů statických momentů jednotlivých segmentů, tj. na základě znalosti hmotností jednotlivých segmentů m_i a poloh d_i těžišť těchto segmentů v předem definované kartézské souřadné soustavě s definovaným počátkem soustavy. Výpočet souřadnic celkového těžiště soustavy segmentů těla provedeme dle rovnic:

$$d_x = \frac{\sum_{i=1}^n d_{ix} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad d_y = \frac{\sum_{i=1}^n d_{iy} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad d_z = \frac{\sum_{i=1}^n d_{iz} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (14)$$

Dodejme, že vypočtená poloha celkového těžiště těla ovlivňuje stabilitou člověka a tím způsob držení těla, resp. polohu segmentů těla v prostoru.

Z výše uvedeného základu pro řešení dynamické analýzy otáčivého pohybu v kloubu obecný postup řešení předpokládá tyto body:

- 1) Rozpoznání anatomických struktur, které jsou zapojeny při vyvozování síly. Obecně se jedná o:
 - pohybuující se části těla,
 - hlavní svaly, které jsou aktivní při vyvozování pohybu.
- 2) Určení úhlového zrychlení pohybuující se části těla. U kloubů končetin je možné zrychlení uvažované části těla vyvodit z měřené změny úhlu v kloubu pomocí MoCap systémů. Následně se vyhodnocením měření určí maximální úhlové zrychlení pro jednotlivé fáze pohybu.
- 3) Určení hmotného momentu setrvačnosti pro pohybuující se části těla. Pro jeho určení se mohou použít antropometrické údaje uvažovaných částí těla. Běžně jsou pro výpočet používány tabulky hodnot, které byly zjišťovány experimentálně.

- 4) Výpočet točivého momentu, který působí v kloubu. Točivý moment působící v kloubu vypočítáme pomocí upraveného druhého Newtonova zákona, který tvrdí, že když je pohyb úhlový, točivý moment je součinem hmotného momentu setrvačnosti tělesa (v našem případě segmentu těla) a úhlového zrychlení tohoto tělesa.
- 5) Výpočet velikosti síly svalu, která způsobí zrychlení/zpomalení uvažované části těla ze zjištěného točivého momentu. Točivý moment síly je dán součinem svalové síly (nebo výslednicí svalových sil), která způsobuje zrychlení/zpomalení uvažované části těla, a kolmé vzdálenosti nositelky této síly od středu otáčení.
- 6) Výpočet velikosti kloubní reakce pro jednotlivé okamžiky pohybu pomocí statické analýzy. Když vypočítáme svalovou sílu výše popsaným postupem, zbývající části problému můžeme řešit jako statický problém při použití statického rovnovážného stavu segmentů. Určíme tak hodnotu kloubní reakce, která působí v kloubu v určitém časovém okamžiku.

segment	hmotnostní koeficienty		
	B_{0i}	B_{1i}	B_{2i}
noha	-0,8290	0,0077	0,0073
bérec	-1,5920	0,0362	0,0121
stehno	-2,6490	0,1463	0,0137
ruka	-0,1165	0,0036	0,0017
předloktí	0,3185	0,0144	-0,0011
nadloktí	0,2500	0,0301	-0,0027
hlava	1,2960	0,0170	0,0143
horní část trupu	8,2144	0,1862	0,0584
střední část trupu	7,1810	0,2234	-0,0663
dolní část trupu	-7,4980	0,0976	0,0490

Tab.1: Koeficienty pro stanovení hmotností segmentů těla, [18], [20].

segment	koeficienty momentu setrvačnosti (sagitální rovina)					
	muž			žena		
	B_{0i}	B_{1i}	B_{2i}	B_{0i}	B_{1i}	B_{2i}
noha	-105	0,116	0,703	-78,1	0,181	0,496
bérec	-1389	4,45	8,19	-690	1,86	5,22
stehno	-2028	41,2	4,09	-6342	35,5	32,5
ruka	-21,3	-0,0219	0,168	-17,6	0,0436	0,113
předloktí	-158	-0,0327	1,23	-122	0,598	0,714
nadloktí	-471	1,85	2,55	46,1	1,11	-0,190
hlava	-1632	6,06	8,86	-952	2,70	6,50
horní část trupu	-2321	17,7	10,7	2303	34,0	-20,2
střední část trupu	440	9,93	-3,89	-319	6,40	1,08
dolní část trupu	788	23,6	-10,3	-129	11,0	-0,79

Tab.2: Koeficienty pro stanovení momentu setrvačnosti u muže a ženy, [20].

Určení zatížení menisku

Přibližnou velikost síly působící v kolenní při dopadové fázi skoku můžeme také určit z předpokladu změny kinetické energie objektu. Změnu kinetické energie tělesa vyvolá práce vykonaná silami působícími na toto těleso. Předpokládejme, že po doskoku bude následovat dopadová fáze, během které dojde k úplnému zastavení pohybu. Můžeme tedy určit práci potřebnou k zastavení pohybu, která je rovna kinetické energii pohybující se soustavy segmentů těla:

$$W = \Delta E_k \Rightarrow F_B \cdot s_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2, \quad (15)$$

kde s_B je hloubka podřepu resp. dráha vykonaná tělem k utlumení pohybu, m je hmotnost zpomalované části/částí těla. Pokud je rychlost při doskoku volným pádem $v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ (pro zjednodušení neuvažujeme odpor prostředí), kde h je výška skoku, pak přibližná velikost průměrné síly je:

$$F_B = \frac{m \cdot g \cdot h}{s_B} \Rightarrow W = E_p, \quad (16)$$

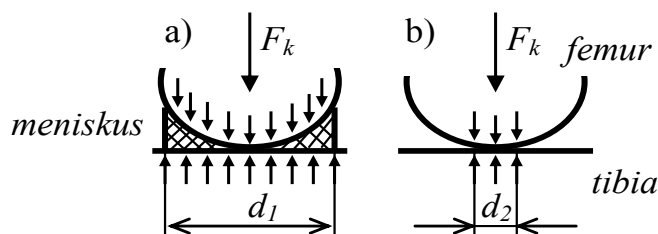
což odpovídá vztahu přeměny potenciální polohové energie před skokem na práci k pohlcení této energie při dopadu. Pokud počítáme zatížení v kloubech např. dolní končetiny, předpokládáme, že se síla bude při doskoku rozkládat na obě nohy, či jiné části těla v souladu s uspořádáním segmentů těla při doskoku. Například při chůzi po schodech však celkovou sílu, kterou působí segmenty horní části těla na segmenty dolní části těla tj. nohy, zachycuje především ta noha, která dopadá při došlapu na terén.

Dále budeme jako vzorový příklad uvažovat výpočet silových poměrů a napětí v koleni při chůzi. Při pohybu po schodech dosahuje velikost silové zátěže kolena 3-5 násobku hmotnosti těla:

$$F_k = 5 \cdot F_g = 5 \cdot m \cdot g. \quad (17)$$

Aby nedocházelo k vzájemnému poškozování především chrupavčitých styčných částí stehenní a holenní kosti, tak zatížení rozkládá v kolenním kloubu meniskus, neboť styčné plochy stehenní a holenní kosti do sebe tvarově nezapadají. Nerovnost tedy kostí vyrovnávají menisky, což jsou vazivové chrupavky umístěné v prostoru mezi kostmi a reprezentují většinu kloubní plochy. Menisky jsou pružné a přitom pevné, dobře tlumí nárazy, přenášejí a rozkládají hmotnost těla a brání opotřebením kloubní chrupavky. V plném natažení kloubu je přes 50 % vertikální zátěže přenášeno přes menisky, při ohnutí (90°) je to ale až 85 %.

Předpokládejme, že mezní napětí chrupavky je $\sigma_{otD} = 10 \div 12 \text{ MPa}$ a pokusme se teoreticky porovnat případy rozložení napětí v kolenním kloubu s meniskem a po meniskektomii.



Obr.5: Schéma rozložení zatížení a) s meniskem a b) po meniskektomii, pouze s chrupavčitou částí kostí femur a tibia.

Pro zjednodušení předpokládejme kruhovou styčnou plochu v obou případech, obr.5:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}; \quad S_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}. \quad (18)$$

a odtud $S_1 > S_2$.

Pokud víme, že napětí pod styčnou plochou kostí spočteme vztahem:

$$\sigma_{ot} = \frac{F_k}{S} \leq \sigma_{otD}. \quad (19)$$

Bylo zjištěno, že:

$$\sigma_{ot1} < \sigma_{otD} \leq \sigma_{ot2}. \quad (20)$$

Což znamená, že v případě odstranění menisků dochází k trvalému poškození chrupavčitých částí kostí, neboť po meniskektomii dojde ke koncentraci napětí na styčných plochách kostí a tím k předčasné artróze.

3.7 Zatížení kyčelního kloubu

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete zatížení svého kyčelního kloubu podle Fischera.
- 2) Navrhněte minimální kruhový průřez krčku endoprotézy pro vámi zjištěné zatěžující síly krčku.
- 3) Určete zatížení svého kyčelního kloubu podle Pauwelse.

Teoretický základ řešených úloh

V důsledku bipedálního pohybu se stává kyčelní kloub z hlediska mechaniky nejexponovanějším místem, a to je jeden z důvodů, proč patří v biomechanice mezi nejpodrobněji matematicko-fyzikálně popsané klouby těla a vývoj endoprotéz tohoto kloubu došel nejdále. V lidském těle jde o největší kloub, který umožňuje pohyb organismu, a tudíž se jedná o nejrozšířenější kloubní endoprotézu. Kyčelním kloubem se spojuje končetina s tuhým pánevním pletencem, tj. pánví. K udržení vzpřímeného postojení musí stále fungovat silný svalový aparát, který udržuje rovnováhu. Tomuto postavení je přizpůsoben celý skelet člověka, především pánev. Z toho důvodu je posunut počátek abduktorů laterálně, dále od centra otáčení kyčelního kloubu, čímž se prodlužuje a zvyhodňuje pákové působení těchto svalů. Kloubní spojení mezi pánví a stehenní kostí má tři stupně volnosti, pokud neuvažujeme luxaci. Jsou to všechny tři rotační pohyby podél os, takže by pro pohyb dolní končetiny v kyčelním kloubu stačily z mechanického hlediska tři páry svalů, tj. každý z párů pro zajištění rotace kolem jedné osy rotace v obou směrech. V oblasti kyčelního kloubu je však 20 různých svalů, jejichž kombinované působení způsobuje různé fáze jednotlivých pohybů v kloubu, [17].

Kyčelní kloub je kulovitý kloub s omezenou pohyblivostí danou úhlovými rozsahy pohybů. Kloubní jamkou je acetabulum, které má tvar duté polokoule o poloměru zhruba 2,5cm. Horní konec femuru je tvořen spongiózní kostí. Spongióza je uspořádána do systému trámců, jejichž směr v podstatě odpovídá silokřivkám, po nichž probíhá přenos sil z kloubu na kost. Systém umožňuje optimální přenos působících sil při minimálním množství kostního materiálu. Prostorová orientace konce femuru je následující: podélná osa krčku svírá s podélnou osou diafýzy tzv. kolodiafyzární úhel. Tento úhel se mění s věkem. Při narození dosahuje téměř 160° a snižuje se až na 125°–135° v dospělosti. Další významný úhel je úhel antevertze, popř. retrovertze krčku. Je to úhel, který svírá podélná osa krčku s frontální rovinou proloženou kondyly femuru. I tento úhel se mění s věkem. Při narození se pohybuje kolem 40°, u dospělých činí obvykle 7 až 15°. Kyčelní kloub plní dvě hlavní funkce: umožňuje pohyb dolní končetiny jako celku vůči trupu a optimalizuje přenos tlakových sil. Zatížení kyčelního kloubu se skládá ze zatížení od tělesné hmotnosti a ze zatížení od tahu svalů. Výsledná zátěž, působící na nosné části kloubních povrchů, je přenášena na hyalinní chrupavku, subchondrální zónu i vlastní kostěné kloubní komponenty, [17].

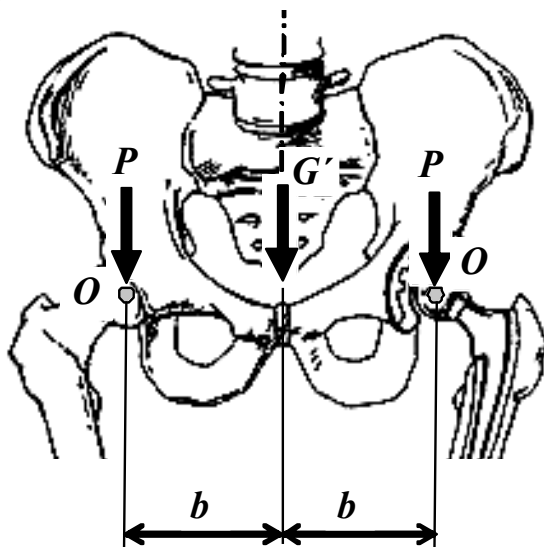
Silové poměry v kyčelním kloubu dle Fischerova modelu

Existuje řada modelů, které se snaží vysvětlit biomechaniku kyčelního kloubu. Nejjednodušší je Fischerův statický model kyčelního kloubu, který zanedbává prostorové uspořádání kloubu, jedná se o model rovinný. Předpokladem je, že výslednice působících sil na hlavici kloubu je svislá, tj. jedná se o vzpřímený stoj se svislým zatížením.

Uvažujeme, že tíhová síla \vec{G} působí v těžišti těla lokalizovaném v oblasti disku Th10–11 a je volně posuvná po nositelce této působící síly, přičemž předpokládáme, že nositelka odpovídá podélné ose těla. Tíhová síla celého těla \vec{G} snižená o tíhu nosných dolních končetin \vec{G}' potom přibližně odpovídá dvěma třetinám velikosti tíhové síly celého těla. Síly \vec{P}_1 , \vec{P}_2 působící ve středu hlavic kyčelních kloubů získáme rozložením síly \vec{G}' na dvě stejně velké síly, v případě rovnoměrného rozložení síly \vec{G}' při symetrickém stoju. Doplňme, že pro úlohu asymetrického stoje bychom síly

\vec{P}_1, \vec{P}_2 mohli určit např. ze zjištěné polohy těžiště celého těla (COM) pomocí segmentového modelu těla, nebo bychom síly mohli vypočítat a měřit pomocí balanční plošiny či tlakové plošiny (resp. koberce či vložky do bot). Směr \vec{P}_1, \vec{P}_2 odpovídá směru \vec{G}' , velikost sil \vec{P}_1, \vec{P}_2 je rovna pro symetrický stoj polovině velikosti \vec{G}' :

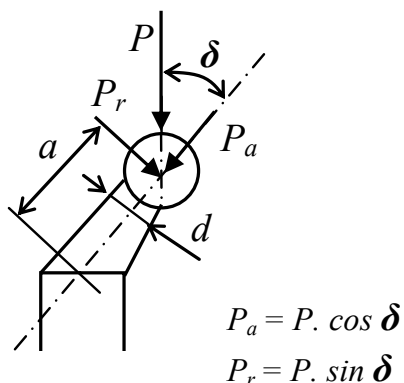
$$|\vec{P}| = |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{G}'| = \frac{1}{3} \cdot |\vec{G}| \quad (1)$$



Obr.1: Fischerův statický model zatížení kyčelního kloubu.

Určení namáhání krčku femuru

Síla působící na model krčku přes hlavici kloubu se v rovinné úloze rozkládá na sílu působící kolmo a na sílu působící ve směru podélné osy krčku. Krček femuru bude tedy namáhán kombinovaným namáháním a to ohybem a tlakem, obr.2. Namáhání ohybem je způsobeno silovou dvojicí ležící v rovině kolmé na rovinu průřezu (dvojici sil tvoří zatěžující síla P_r a vazební síla ve vetknutí krčku do diafýzy femuru), neboli ohybovým momentem. Namáhání tlakem je způsobeno silou P_a působící kolmo na průřez ve směru podélné osy krčku, tato síla je opět zachycena stejnou silou opačného směru resp. je přenášena do diafýzy femuru. Za zjednodušujících předpokladů můžeme tedy krček femuru považovat za „vetknutý nosník“, který je na svém konci zatížen silou, jejíž složky působí ve směru podélné osy a kolmo na podélnou osu nosníku.



Obr.2: Schéma zatížení kyčelního kloubu.

Pokud jsme zjistili velikost síly zatěžující krček femuru, musíme zjistit, pro výpočet velikosti zatížení, také průřezové charakteristiky. Za zjednodušujících předpokladů bude mít krček femuru

plný kruhový průřez o průměru d . Plošný tzv. kvadratický moment setrvačnosti kruhového průřezu vztahený k osám procházejícím těžištěm plochy průřezu vypočteme vztahem:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \quad (2)$$

Při namáhání ohybem se část vláken krčku prodlužuje (je namáhána na tah), část se zkracuje (je namáhána tlakem), jedná se tedy o normálové namáhání. Velikost prodloužení nebo zkrácení vzrůstá se vzdáleností od neutrální osy a maximální je v krajních částech průřezu. Za účelem zjednodušení výpočtů zavedeme tzv. průřezový modul v ohybu W_O , který vypočteme jako kvadratický moment průřezu podělený vzdáleností krajního, nejvíce namáhaného, vlákna, tj. $y_{max} = d/2$:

$$W_O = \frac{I}{y_{max}} = \frac{2 \cdot I}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}. \quad (3)$$

Maximální normálová napětí v průřezu nosníku namáhaného ohybovým momentem se určí vztahem

$$\sigma_o = \frac{M_O}{W_O}, \quad (4)$$

kde maximální ohybový moment je $M_O = P_r \cdot a$, obr.2.

Pevnostní výpočet maximálního normálového tlakového napětí je dán vztahem

$$\sigma_t = \frac{P_a}{A}, \quad (5)$$

kde A je průřez krčku. Pro kombinované namáhání tlakem a ohybem určíme celkové maximální normálové napětí součtem normálových napětí:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_t \pm \sigma_o \quad (6)$$

a po dosazení:

$$\sigma_{1,2} = \frac{P_a}{A} \pm \frac{M_O}{W_O} = \frac{P_a}{A} \pm \frac{P_r \cdot a}{W_O}. \quad (7)$$

Pevnostní podmínka, s ohledem na maximální dovolené normálové napětí, je:

$$|\sigma_1| \wedge |\sigma_2| \leq \sigma_D. \quad (8)$$

Silové poměry v kyčelním kloubu dle Pauwelsova modelu

Dalším rovinným modelem je Pauwelsův model, který vychází z Fischerova modelu, a snaží se zohlednit vliv chůze. Biomechanické poměry v kloubu odpovídají momentové podmínce rovnováhy s centrem otáčení O ve středu kloubu končetiny, kde na delší rameno a (obr.3) působí výslednice síly odpovídající hmotnosti těla bez hmotnosti končetiny v opěrné fázi. A tento moment je eliminován silou svalstva působícího na rameni b (obr.3), odpovídající vzdálenosti od středu kloubu k úponu svalů na velkém trochanteru.

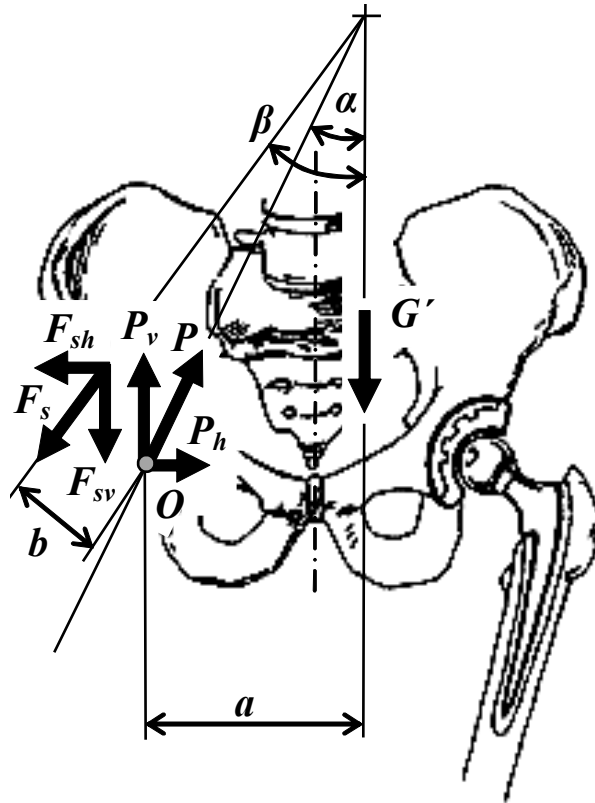
Necht' směr výsledné působící síly svalstva je pod úhlem β a výsledná síla působící na kyčelní kloub P je odchýlena laterálně o úhel α od vertikály. Tyto úhly se mohou určit z antropometrie a analýzou pohybu či polohy těla, např. pomocí MoCap systémů. V Pauwelsově modelu dále předpokládáme, že jsou jednotlivé části skeletu dokonale tuhé a navzájem spojené segmenty. Z momentové podmínky rovnováhy v rovinné úloze (Obr.3) určíme sílu F_s k bodu O jako výslednici svalových sil udržující rovnováhu:

$$F_s \cdot b = G' \cdot a \Rightarrow F_s = \frac{a}{b} \cdot G', \quad (9)$$

kde a je vzdálenost nositelky tíhové síly k bodu O , b je vzdálenost nositelky výslednice svalových sil k bodu O a tíhová síla snižená o tíhu oporné končetiny je přibližně:

$$G' = \frac{5}{6} \cdot G, \quad (10)$$

kde G je tíhová síla celého těla.



Obr.3: Pauwelsův model zatížení kyčelního kloubu.

Vzhledem k tomu, že určená výsledná síla svalů F_s působí přibližně pod úhlem β . Složky výsledné síly F_s rozložené ve směru souřadnicových os v rovinné úloze určíme vztahy:

$$F_{sh} = |\vec{F}_s| \cdot \sin \beta, \quad F_{sv} = |\vec{F}_s| \cdot \cos \beta \quad (11)$$

Z předpokladu statické rovnováhy sil můžeme určit celkovou velikost síly P působící na hlavici ze znalosti složek:

$$P_h = F_{sh}, \quad P_v = F_{sv} + G', \quad (12)$$

$$P = \sqrt{F_{sh}^2 + (F_{sv} + G')^2}. \quad (13)$$

Výsledná síla působící na kyčelní kloub P při běžných pohybech odpovídá přibližně 2,5 násobku hmotnosti. Pauwelsův model statického stoje nezohledňuje požadavek zachování stability těla, nositelka výsledné tíhové síly také neprochází obvykle opěrnou plochou končetiny během chůze, takže je model stoje nestabilní. Přesto je tento model v praxi často využíván. Dále existují modely jako např. Inmanův, Denhamův, Rydellův a další. Modely se využívají především z důvodu vývoje a volby parametrů endoprotéz a v současnosti se pro modelování kloubů/endoprotéz a jejich namáhání využívá především výpočtů založených na metodě konečných prvků.

3.8 Zatížení páteře a přibližný výpočet namáhání obratle

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Na základě znalostí z anatomie uvažujeme meziobratlové spojení a stanovme sílu, která způsobí kompresivní frakturu obratle (obratlů).
- 2) Uvažujeme model meziobratlového spojení s homogenním rozložením materiálu a stanovme, experimentálně ze znalosti velikosti síly působící na model, normálové zatížení.
- 3) Ze znalosti velikosti normálového namáhání a velikosti zkrácení při měření modelu určete modul pružnosti v tahu (Youngův modul) použitého materiálu modelu obratle.
- 4) Určete antropometrické údaje horní části těla za předpokladu znalosti váhy a výšky těla, a ze způsobu úchopu závaží a antropometrických údajů určete velikost zatížení vybraného obratle páteře.

Teoretický základ řešených úloh

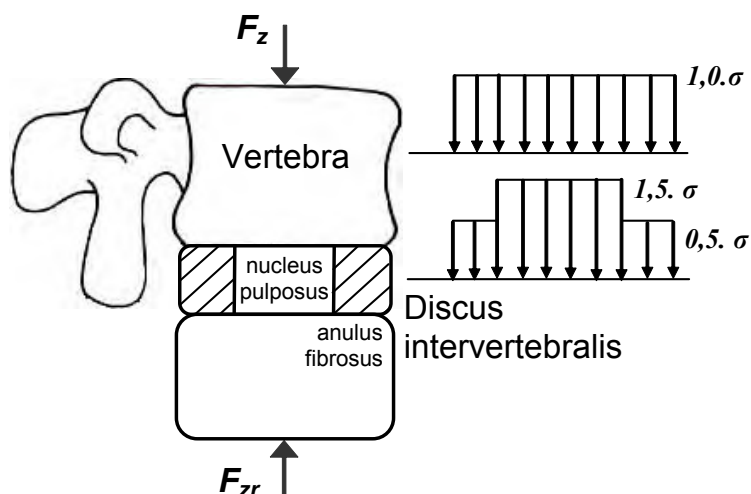
Páteř je nejdůležitější součást kostry člověka, je součástí tzv. axiálního systému, a má nosnou, hybnou a ochrannou funkci. Základní funkční jednotkou páteře je pohybový segment. Segment je složen ze sousedících polovin obratlových těl, páru meziobratlových kloubů, meziobratlové destičky, fixačního vaziva a svalů. Z funkčního hlediska má pohybový segment páteře tři základní komponenty: nosnou, hydrodynamickou a kinetickou, [18].

- Nosná a pasivně fixační komponenta segmentu je tvořena obratli a páteřními vazy.
- Kinetická a aktivně fixační komponenta segmentu je tvořena klouby a svaly.
- Hydrodynamická komponenta segmentu je tvořena meziobratlovou destičkou a cévním systémem páteře.

Obratlová těla (vertebra) jsou základními nosnými prvky páteře. Jedná se o soustavu dvou typů kostí, tj. spongiózní a kompaktní. Kompaktní část obratle přenáší 45-75% vertikálního zatížení působícího na obratel a spongiózní část nese zbývající zatížení. Pevnost těla obratle na tlak působící v osovém směru je pět až sedmkrát větší než pevnost na tlak působící v bočním směru. Byla zjištěna vysoká korelace mezi "hustotou" obratlového těla a jeho mechanickou odolností. Obratle jsou fixovány vazy a svaly. Vazivové spoje jsou pasivní částí nosné komponenty segmentu zpevňující páteř, [18].

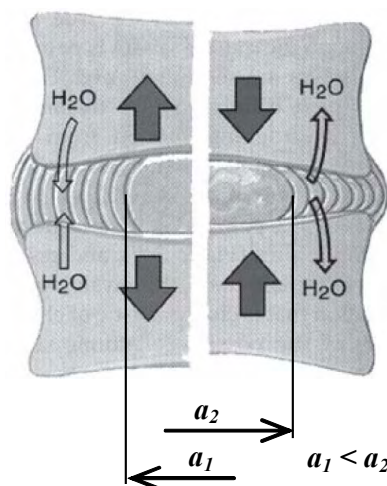
Kinetickou a aktivně fixační komponentou pohybového segmentu jsou meziobratlové klouby, kraniovertebrální spojení a svaly. Tato komponenta má důležitou roli při zajištění pohybu sousedících obratlů, menší význam má z hlediska nosnosti. Pohyblivost úseků páteře je dána součtem drobných pohybů meziobratlových kloubů a mírou stlačitelnosti meziobratlových destiček. Páteř může vykonávat čtyři základní typy pohybů: předklony (anteflexe) a záklony (retroflexe); úklony (lateroflexe); otáčení (rotace, torze) a pružící pohyby.

Hydrodynamickou komponentou pohybového segmentu páteře jsou meziobratlové destičky a cévní systém páteře. Meziobratlová destička (discus intervertebralis) je tvořena vazivovým prstencem (anulus fibrosus) obklopujícím želatinózní jádro (nucleus pulposus). Na povrchu jádra je pevnější vazivový obal tvořený kulovitou lamelou. Vazivový prstenec destičky má znaky připomínající stavbu osteonu kostní kompakty. Vazivová vlákna tvoří lamely a v každé lamele jsou orientována určitým směrem, pod určitým sklonem. Vlákna sousedících lamel se kříží pod zhruba pravým úhlem, a tím vzniká v rámci celého disku komplikovaná trojrozměrná struktura, odolná vůči zatížení ve třech základních rovinách. Rozložení napětí v průřezu meziobratlové ploténky při kolmém stlačování je znázorněno na Obr.1. Ze schématu je zřejmé, že kompresivní napětí je 1,5x větší na jednotku plochy v nucleus pulposus, než odpovídá průměrnému zatížení v obratli. Naopak, anulus fibrosus je při stejném vnějším zatížení namáhán 0,5x. Část dolního obratle pod jádrem, do kterého se přenáší zatížení, je tedy zatížena více než jeho vnější část pod vazivovou částí, [18].



Obr.1: Zjednodušené schéma přenosu zatížení prostřednictvím obratle a meziobratlové ploténky.

Tekutina uvnitř ploténky působí jako přirozený tlumič při menších pohybech, tomu napomáhá také pružná chrupavka. Svou pružností tlumí meziobratlová ploténka nárazy, kterým je páteř vystavena. Princip meziobratlové destičky, jakožto tlumiče, je naznačen na obrázku Obr.2. Intervertebrální disky jsou hydrodynamické tlumiče, absorbující statické i dynamické zatížení páteře. Disky, těla obratle, okolní vazivo a cévy páteře také tvoří osmotický systém, ve kterém se při zatížení a odlehčení velmi intenzivně vyměňuje voda a ve vodě rozpustné látky.



Obr.2: Funkce meziobratlové ploténky při změně zatížení, [2].

Ačkoliv je z biomechanického pohledu systém tlumiče velmi výhodný pro běžné způsoby zatížení svalově-kosterního systému, může dojít k poškození obratle páteře při velmi rychlém vzrůstu zatížení ploténky, resp. obratle, kdy systém meziobratlové ploténky neabsorbuje energii a neproběhne deformace ploténky, čímž by bylo využito principu tlumiče. Tekutina uvnitř nucleus pulposus je téměř nestlačitelná a působí na obratel tlakem, jehož velikost je ještě zvýšena rázovou silou, která překračuje několikanásobek statické síly. Působící dynamické zatížení překročí mezní napětí pevnosti povrchu obratle, a tím dojde k jeho poškození.

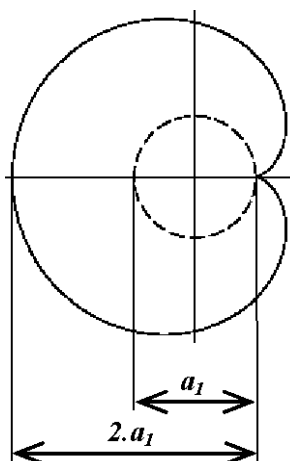
Zjednodušený výpočet namáhání obratle

Vzhledem k tomu, že se jedná o fyzikálně velmi obtížnou úlohu, nejčastěji řešenou metodou konečných prvků, pro náš účel je nutné předpokládat řadu zjednodušení. Jako například předpokládejme rovnoměrné rozložení zatížení pod nucleus pulposus a jeho nestlačitelnost v případě rychlého vzrůstu zatížení, tj. nucleus pulposus je tuhá koule, kdy nedojde k využití

tlumících účinků ploténky. Dále anulus fibrosus je absolutně elastický. Pro kolmé zatížení pak můžeme psát:

$$\sigma_{ot} = \frac{|\vec{F}_z|}{S_n} \leq \sigma_{otD}, \quad (1)$$

kde σ_{ot} je normálové napětí v části obratle pod nucleus pulposus, \vec{F}_z je síla přenášená ploténkou na obratel a S_n je účinná plocha pod nucleus pulposus. Tvar průřezu nucleus pulposus a anulus fibrosus přibližně odpovídá tvaru tzv. prosté epicykloidy. Speciálním případem epicykloidy je kardioida uvedená na obrázku Obr.3. Dodejme, že v úloze je zanedbán konkávní tvar obratle.



Obr.3: Průřez nucleus pulposus reprezentovaný epicykloidou.

Plocha kardioidu se určí vztahem:

$$S_n = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot a_1^2, \quad (2)$$

kde a_1 je průměr nehybné kružnice, který je u kardioidu roven průměru kružnice odvalovací. S ohledem na výše definované zjednodušující podmínky můžeme říci, že:

$$F_z \leq \sigma_{otD} \cdot S_n = \sigma_{otD} \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot a_1^2, \quad (3)$$

kde σ_{otD} je mezní napětí pevnosti obratle při kompresi, které je určeno vztahem:

$$\sigma_{otD} = f_{kort} \cdot \sigma_{kortD} + f_{spon} \cdot \sigma_{sponD}, \quad (4)$$

přičemž f_{kort} a f_{spon} reprezentují podíly obratle odpovídající kortikální (kompaktní) resp. spongiózní (houbovitě) části kosti podílející se na přenosu zatížení, $f_{kort}=1/9$ a $f_{spon}=8/9$. Mezní napětí těchto částí je přibližně $\sigma_{kortD}=120\text{MPa}$ a $\sigma_{sponD}=11\text{MPa}$, [2]. K překročení dovolené hodnoty σ_{otD} a tudíž ke kompresnímu poškození obratle dochází často při pádech u starších osob či nemocných (např. při osteoporóze). Hookeův zákon je pro malá napětí a malé deformace:

$$\sigma_{ot} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma_{ot} \cdot l}{E}, \quad (5)$$

kde ε je poměrné délkové zkrácení popř. prodloužení, l označuje původní délku a E je modul pružnosti v tahu.

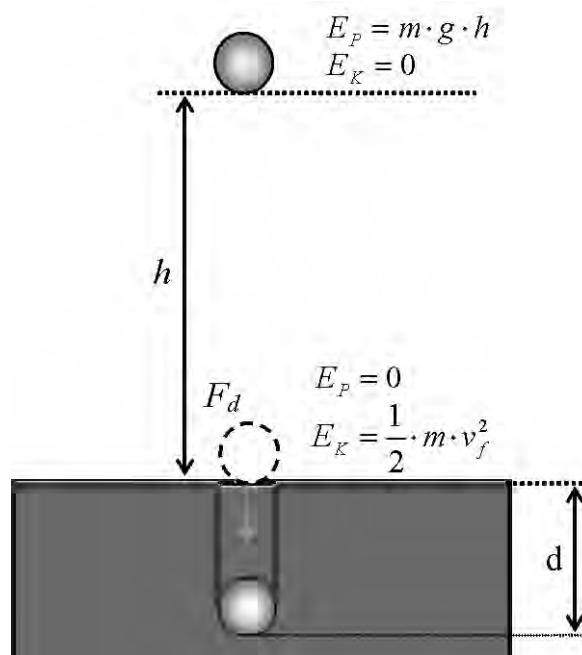
Určení průměrné síly přenášené páteří při dopadu

Velikost průměrné síly při dopadu, která je přenášená páteří, můžeme vypočítat za zjednodušujících předpokladů, obr.4, a znalosti transformace energií:

$$E_p = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2, \quad (6)$$

kde m je hmotnost konkrétní části tělesa, jenž bude při dopadu působit na obratel, h je výška, z které segmenty části těla padají, a v_f je dosažená rychlost před dopadem. Pro přímočarý pohyb během dopadu je vykonaná práce pohlcující kinetickou energii pohybujícího se tělesa rovna průměrné síle při dopadu F_d a překonané vzdálenosti, tj. deformaci d , během dopadu:

$$W = F_d \cdot d \Rightarrow F_d = \frac{m \cdot v_f^2}{2 \cdot d}. \quad (7)$$



Obr.4: Zjednodušené schéma pohlcení kinetické energie pohybující se hmotné částí těla.

K určení okamžité velikosti resp. průběhu zatěžující síly při dopadu F_d můžeme použít sledovacích či inerciálních systémů k detekci velikostí zrychlení/zpomalení a ve směru dopadu, pak by se přibližná velikost průměrné síly F_d určila vztahem:

$$F_d = m \cdot a. \quad (8)$$

Za zjednodušujících předpokladů přenosu síly F_d pouze obratlem resp. meziobratlovou ploténkou můžeme psát $F_d = F_z$.

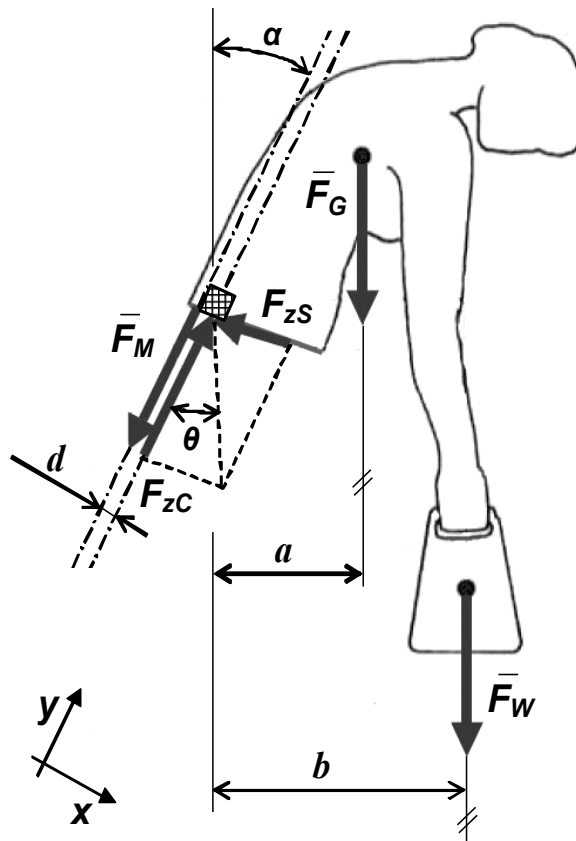
Zatížení páteře při přenášení břemen

Pokud by nás zajímalo statické zatížení páteře resp. obratle, použijme pro názorný výpočet model osoby přenášející břemeno. Při vzpřímeném postoji se značná část hmotnosti trupu přenáší na páteř v lumbosakrální oblasti. Při změnách polohy těla se mění zakřivení páteře v této oblasti a zmenšuje se plocha ploténky, čímž se zatížení zvyšuje. Hrozí tedy nebezpečí výhřezu ploténky. S prohloubením předklonu nebo záklonu také stoupá statická zátěž bérceových, stehenních i zádových svalů. Pro další řešení úlohy předpokládejme statický stabilní stoj, pro který platí rovnováha sil a rovnováha momentů v rovinné úloze:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad (9)$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad (10)$$

$$\sum M_{iz} = 0. \quad (11)$$



Obr.5: Schéma silových poměrů při přenášení břemene.

Po dosažení do vztahu v souladu se silovými poměry na části těla nad zkoumanou částí páteře, obr.5, můžeme psát:

$$|\vec{F}_G| \cdot \sin \alpha + |\vec{F}_W| \cdot \sin \alpha - F_{zS} = 0, \quad (12)$$

$$F_{zC} - |\vec{F}_M| - |\vec{F}_G| \cdot \cos \alpha - |\vec{F}_W| \cdot \cos \alpha = 0, \quad (13)$$

$$|\vec{F}_G| \cdot a + |\vec{F}_W| \cdot b - |\vec{F}_M| \cdot d = 0, \quad (14)$$

kde \vec{F}_G je tíha té části nacházející se nad studovaným obratlem a působící v těžišti uvažované části těla na rameni a vzhledem k obratli. \vec{F}_W je tíha přenášeného předmětu, která působí ve vzdálenosti b od studovaného obratle. \vec{F}_M je síla, která musí být vytvářena zádovým svalstvem, aby systém uvedla do rovnováhy, a působí ve vzdálenosti d od středu obratle, tato vzdálenost je přibližně 5-6cm. F_{zC} a F_{zS} jsou reakční síly, které působí v páteři resp. obratli. Neznámými veličinami jsou tedy F_M , F_{zC} a F_{zS} , které můžeme snadno určit z dvou silových a jedné momentové rovnice. Velikost výsledné reakční síly je pak:

$$|\vec{F}_z| = \sqrt{F_{zC}^2 + F_{zS}^2} \quad (15)$$

a působí pod úhlem vzhledem k podélné ose obratle:

$$\theta = \arctan\left(\frac{F_{zS}}{F_{zC}}\right). \quad (16)$$

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že nejvhodnější metodikou nošení předmětů, aby nedocházelo k bolestem zad, je minimalizovat rozměrové parametry a a b . Obdobným způsobem by se řešila úloha zatížení páteře při přenášení objektů na zádech jako např. batohů atd.

3.9 Stabilita těla a měření kontaktních sil pod dolními končetinami

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete polohu COP měřené osoby z hodnot změřených na čtyřech senzorech stabilometrické plošiny/vážených čidlech. Úlohu řešte pro min. dva případy různé polohy GCoM (osoba bez dalšího zatížení, osoba s nesoucím zatížením (batoh, atp.)).
- 2) Určete pomocí vážených čidel nebo tlakové plošiny, zdali má vybraná osoba zdravé, ploché, nebo vypouklé chodidlo.
- 3) Vyhodnoťte pomocí siloměrné plošiny trajektorii ZMP resp. COP při dynamické stabilitě během pohybu.

Teoretický základ řešení úloh

Mezi důležité metody v klinické praxi patří analýza a hodnocení reakčních sil pod chodidly. Nejčastěji lékaři požadují hodnotit polohu působíště výsledných kontaktních sil pod chodidly při stožení či chůzi, například v rámci metody zvané posturografie. K měření se používají rovinné desky s tlakovými či siloměrnými čidly. V průběhu měření se deskou, na které stojí pacient, určuje poloha těžiště těla (Center of Mass - COM) což je bod, kolem něhož je tělesná hmotnost rovnoměrně rozložena, a při posturografii se určuje poloha jeho průmětu do transversální roviny, tento bod se označuje GCoM (Ground projection of the Centre of Mass). Poloha COM odpovídá poloze výsledné reakční síly, tj. kontaktní síly pod oběma chodidly na plošině. Dále se při vyšetřování stanovuje vážený průměr tlakových sil, také tzv. centrum tlaku (Center of Pressure - COP), což je střed rozložení tlaku, resp. bod, kolem něhož je rovnoměrně distribuována výsledná kontaktní resp. reakční síla působící po celé styčné ploše segmentů těla s plošinou. COP můžeme určit pro jednotlivé segmenty těla dotýkající se plošiny, např. chodidla, nebo můžeme výsledné COP určit pro všechny segmenty těla dotýkající se plošiny. V případě, že pacient na plošině pouze stojí a nepohybuje se, poloha COP bude odpovídat kolmému průmětu těžiště COM do roviny desky (tj. bodu GCoM), neboť nositelka výsledné tíhové síly procházející COM bude odpovídat nositelce reakční síly, která se nachází v bodě COP. Metoda zjišťování COP a COM se používá ke kvantifikaci poruch rovnováhy a následně např. k určení stavu vestibulárních reflexů.

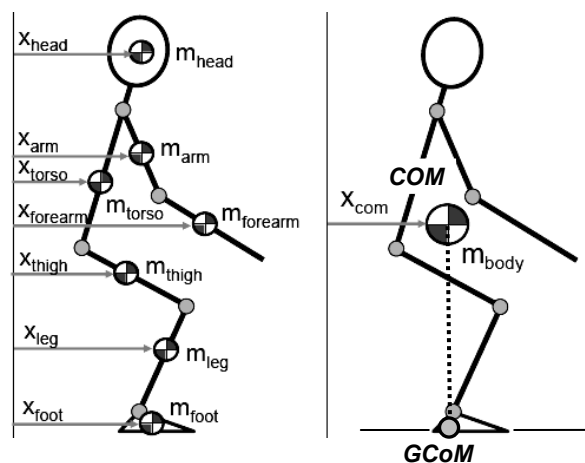
Vyšetření se nejčastěji provádí na tzv. statické nebo pohyblivé balanční (také tzv. stabilometrické či posturografické) plošině. Plošiny určují polohu výsledné kontaktní síly pomocí několika siloměrných snímačů umístěných ve vhodných místech pod tuhou plošinou (deskou), na které stojí nebo se pohybuje pacient. Typická konstrukce balanční plošiny (komerční jsou např. Kistler, Nintendo atp.) je složena z rovné desky, která je podložena snímači (minimálně po jednom snímači v každém rohu plošiny). Plošina umožňuje změřit rozložení váhy resp. tíhy na snímače, spočítat celkovou váhu a také určit polohu průmětu těžiště těla pacienta stojícího na plošině do transversální roviny. Na deskách bývají vyznačena místa pro pravou a levou nohu. Pro výpočet GCoM jsou důležité vzdálenosti jednotlivých senzorů plošiny. Z těchto hodnot vzdáleností a z hodnot zatížení jednotlivých senzorů je možné přesně vypočítat polohu výsledné kontaktní síly, tj. GCoM, od středu plošiny pomocí rovnic statické rovnováhy momentů a sil působících na desku. Data z desky bývají zaznamenávána do modulu záznamu dat prostřednictvím kabelu či bezdrátového spojení. Modul záznamu dat může tvořit přímo součást PC, na kterém jsou data zpracována a vyhodnocena.

K studiu trajektorie pohybu COP (a popř. GCoM) v transversální rovině se také používají tzv. tlakové plošiny (komerční názvy jsou Footscan, Emed, atp.). Tyto plošiny obvykle sledují a zaznamenávají průběh tlaku pod chodidly v závislosti na čase. Měření mohou být prováděna s obuví i bez ní. Z rozložení tlaku pod chodidly umožňují plošiny určit pohyby COP během lékařského testu. Tlakové plošiny se vyrábějí ve tvaru desek, koberečů či vložek do bot, které jsou modifikací tlakových desek, a tak měří rozložení tlaku pod ploškou, obvykle při chůzi či různých modifikacích stoje. K měření jsou používány tlakové plošiny s vysokou hustotou tlakových senzorů.

Plošiny jsou připojeny kabelem k modulu záznamu dat. Tlakových senzorů existuje řada typů. V plantografických plošinách jsou nejčastěji používány kapacitní a odporové senzory. Úkolem vyšetřovaného bývá často během vyšetření či rehabilitace přesouvat COP do různých míst nebo COP udržet v požadovaném bodě, jedná se o rehabilitační proces, tzv. biofeedback. Následně je prováděna analýza a hodnocení stability stoje. Hodnotí se velikosti výchylek COP, rychlost pohybu COP, délka trajektorie pohybu COP a plocha jím opsaná (v transverzální rovině), konfidenční elipsa průmětů COM po určitou dobu a její velikost obsahu, délka a směr os, hodnota směrodatných odchylek v daném směru apod. K dispozici je množství testů s různou délkou trvání a náročností podle vhodnosti vzhledem k měřené osobě. Výsledkem zpracování signálu z plošiny jsou obvykle tabulky a grafy zachycující jak rozložení tlaku pod ploskami tak i řadu dalších z něj odvozených parametrů, tj. např. COP a GCoM.

Určení polohy těžiště těla a dalších ukazatelů stability těla

Polohu těžiště celého těla (COM) můžeme zjistit z polohy těžišť jednotlivých segmentů těla.



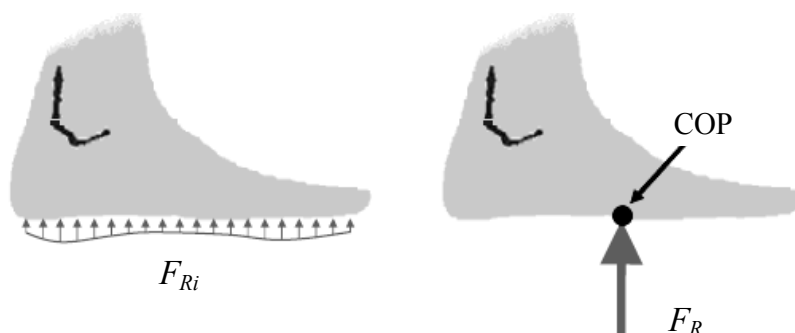
Obr. 1: Schéma určení polohy těžiště člověka, [4].

Vztah pro výpočet polohy těžiště v předozadním směru pomocí statických momentů segmentů části těla, obr. 1, je:

$$x_{com} = \frac{\sum (x_i \cdot m_i)}{\sum m_i} \quad (1)$$

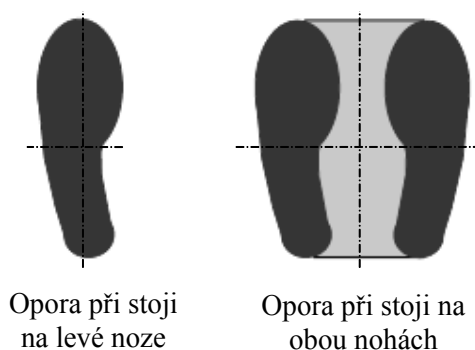
kde x_{com} je poloha těžiště celého těla, x_i a m_i jsou polohy jednotlivých těžišť segmentů a hmotnosti segmentů těla.

Abychom mohli definovat stabilitu člověka, tak nám k tomu pouze znalost polohy těžiště těla (COM) nestačí a musíme ještě uvažovat centrum tlaku (COP), obr. 2.



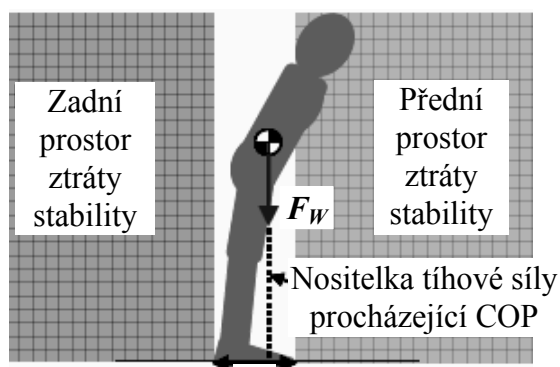
Obr.2: Působení výsledné reakční síly a její distribuce pod chodidlem, [4].

Další informace nutná k určení statické stability těla je znalost tzv. opory. Necht' opora je ohraničená všemi místy, v nichž je tělo v kontaktu s opěrnou plochou. Osoba se může pohybovat s COP v rámci opory, ale COP nelze přesunout mimo oporu.



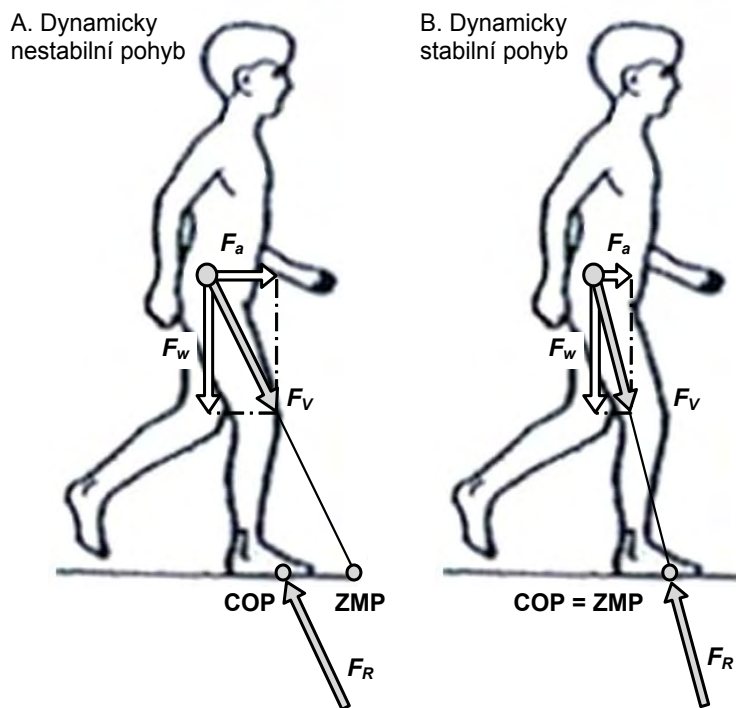
Obr.3: Možné způsoby opory při stoji na nohou, [4].

Statická stabilita při stoji je tedy rovnovážný stav, při kterém centrum tlaku (COP) musí ležet přímo pod těžištěm těla a průmět těžiště těla (GCoM) musí být v rámci hranic opory, obr.4.



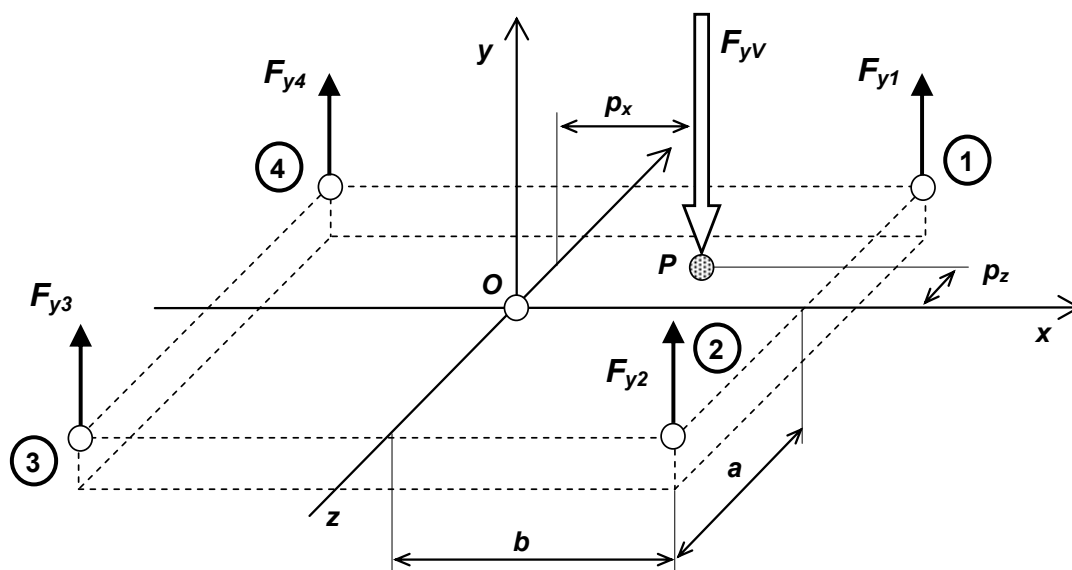
Obr.4: Statická stabilita člověka při stoji, [4].

Dalším typem stability, která se sleduje především při pohybu, je dynamická stabilita. Mnoho dynamických pohybů, včetně chůze a běhu, je nestabilních. Chůze a běh se v podstatě skládají ze série přerušovaných pádů. V případě řešení dynamické stability jde o obtížnější kvantifikaci stability. Lze říci, že pokud není podmínka statické stability splněna (průmět těžiště těla se nenachází v oporném obrazci), pádu brání při pohybu další, během pohybu se v určitých okamžicích vyskytující, vnější síly, setrvačné síly či momenty od těchto sil. Při popisu chování těla během bipedálního pohybu, s ohledem na jeho stabilitu, se můžeme setkat např. s ukazateli: Zero Moment Point (ZMP), Foot Rotation Indicator (FRI) a Centroidal Moment Pivot (CMP). Nejčastěji se využívá pro popis dynamické stability ZMP. Poloha ZMP se určuje pomocí tlakových plošin, které určují polohu COP, neboť je dokázáno, že tělo je při pohybu dynamicky stabilní za předpokladu, že poloha bodu COP je totožná s polohou bodu ZMP. Při dynamické stabilitě se COP opět nachází v rámci hranic opory. Teorie založená na identifikaci a kontrole polohy bodu ZMP poskytuje možnost kontroly dynamické stability, obr.5.



Obr.5: Schéma popisu stability člověka při pohybu pomocí COP a ZMP.

K identifikaci polohy COP resp. GCoM používáme silových plošin. Existuje celá řada konstrukcí silových plošin. V tomto ohledu se budeme blíže zabývat siloměrnou deskou pro určování polohy výsledné působící kolmé síly na plošinu, přičemž se obvykle vyhodnocuje poloha nositelky tíhové síly těla resp. průmětu COM, za předpokladu totožné polohy s COP, při zachování statické stability těla. Takováto deska se nazývá „stabilometrická plošina“. Siloměrná plošina má obvykle pravoúhlý tvar, obr.6, a je tvořena tuhou deskou umístěnou na čtyřech podpěrách. V těchto podpěrách se nacházejí piezoelektrické nebo tenzometrické senzory velikosti sil. Součet velikostí měřených sil ze všech podpěr určuje velikost výsledné síly působící na plošinu ve směru podpěr, tj. kolmo na rovinu plošiny, obr.6. Tím, že určíme síly působící v jednotlivých podpěrách, je také možné určit vznikající momenty na plošině, a odtud působíště výsledné síly, popř. průmět těžiště těla, [3]. Při výpočtu vycházíme z podmínky statické rovnováhy, tj. podmínky rovnováhy sil a momentů.



Obr.6: Schéma silových poměrů na desce a v podpěrách stabilometrické plošiny.

Označíme jednotlivé podpěry 1 až 4, obr.6. Výslednou sílu působící na plošinu určíme vztahem:

$$F_{yV} = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4}. \quad (2)$$

Abychom určili polohu výsledné síly, vyjádříme momenty sil v jednotlivých podpěrách vzhledem ke středu plošiny O :

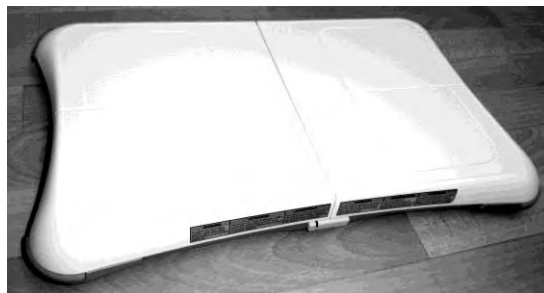
$$M_x = a \cdot (F_{y1} - F_{y2} - F_{y3} + F_{y4}), \quad (3)$$

$$M_z = b \cdot (F_{y1} + F_{y2} - F_{y3} - F_{y4}). \quad (4)$$

Tyto momenty musí odpovídat momentům, které vytvoří síla F_{yV} působící v bodě P vzhledem k bodu O :

$$M_x = p_z \cdot F_{yV}, \quad M_z = p_x \cdot F_{yV}. \quad (5)$$

Řešením výše uvedených rovnic určíme M_x, M_z a pomocí těchto momentů hledanou polohu působíště výsledné síly p_x, p_z .



Obr.7: Stabilometrická plošina firmy Nintendo se čtyřmi vážními čidly v rozích desky.

Pro posouzení stability se mimo stabilometrické plošiny používají také systémy sofistikovanější, takovým příkladem je např. L.A.S.A.R. Posture pro posouzení statické stability pomocí laseru od firmy Otto Bock. Přístroj určuje polohu vertikální složky reakční síly (tj. polohu COP), ale mimo to ji ještě během měření promítá prostřednictvím laserového paprsku na tělo pacienta. Díky tomuto přístroji lze promítnout jinak pouhým okem neviditelné těžiště (COM) resp. nositelku tíhové síly, což umožňuje kontrolovat např. držení těla pacienta, vzdálenosti vertikální složky reakční síly od určitých anatomických nebo referenčních bodů, atp., [3].

Určení velikosti kontaktních sil pod chodidly

Jak již bylo řečeno, v lékařství či sportovní biomechanice nás mimo znalost polohy COM také často zajímá velikost zatížení levé a pravé nohy, poloha COP pod chodidly na plošině a pohyb (trajektorie) COP během stojce či pohybu. Předpokládejme teorii výpočtu působíště výsledné kontaktní síly, tak jako v předchozí úloze pro nalezení polohy těžiště těla (GCoM) pomocí jedné stabilometrické plošiny, ale tentokrát bude měřená osoba stát na plošinách dvou, každým chodidlem na jedné plošině, obr.8.

Výpočet velikosti síly pod chodidlem, tj. síly přenášené do jedné končetiny, je jednoduchý, daný součtem sil na jedné siloměrné plošině, tj. pro chodidlo na desce A :

$$F_{yVA} = F_{y1A} + F_{y2A} + F_{y3A} + F_{y4A} \quad (6)$$

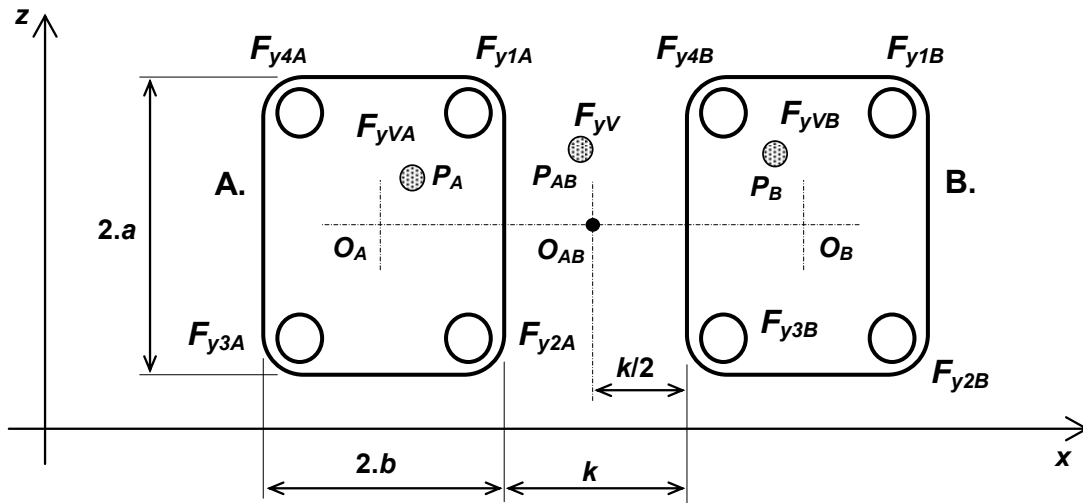
Pro určení polohy působíště výsledné kontaktní síly pod chodidlem, reprezentující bod polohy COP, opět použijeme moment sil v jednotlivých podpěrách vzhledem ke středu plošiny O_A :

$$M_{xA} = a_A \cdot (F_{y1A} - F_{y2A} - F_{y3A} + F_{y4A}), \quad (7)$$

$$M_{zA} = b_A \cdot (F_{y1A} + F_{y2A} - F_{y3A} - F_{y4A}). \quad (8)$$

Tyto momenty musí opět odpovídat momentům, které vytvoří síla F_{yVA} působící v bodě P_A vzhledem k bodu O_A :

$$M_{xA} = p_{zA} \cdot F_{yVA} \quad , \quad M_{zA} = p_{xA} \cdot F_{yVA} \quad (9)$$



Obr.8: Schéma dvou silových plošiny pro měření kontaktních sil pod oběma chodidly.

Řešením uvedených rovnic určíme M_{xA}, M_{zA} a pomocí těchto momentů hledanou polohu působišť kontaktní síly p_{xA}, p_{zA} na první siloměrné desce A . Identicky by se určovala poloha působišť výsledné kontaktní síly také pro druhou desku B .

Budeme-li chtít určit polohu těžiště těla (GCoM) ze dvou siloměrných desek, nejprve musíme opět určit velikost výsledné síly působící na obě plošiny:

$$F_{yV} = F_{y1A} + F_{y2A} + F_{y3A} + F_{y4A} + F_{y1B} + F_{y2B} + F_{y3B} + F_{y4B} \quad (10)$$

Abychom mohli určit působišť výsledné kontaktní síly, vyjádříme si moment sil v jednotlivých podpěrách vzhledem k bodu O_{AB} , který se nachází ve středu vzdálenosti mezi deskami, přičemž předpokládáme totožné rozměry obou siloměrných desek $a = a_A = a_B$ a $b = b_A = b_B$ a uspořádání podle obr.8:

$$M_{xAB} = a_A \cdot (F_{y1A} - F_{y2A} - F_{y3A} + F_{y4A}) + a_B \cdot (F_{y1B} - F_{y2B} - F_{y3B} + F_{y4B}), \quad (11)$$

$$M_{zAB} = \left(\frac{k}{2} + 2 \cdot b_A\right) \cdot (F_{y3A} + F_{y4A}) + \left(\frac{k}{2} + 2 \cdot b_B\right) \cdot (-F_{y1B} - F_{y2B}) + \frac{k}{2} \cdot (F_{y1A} + F_{y2A} - F_{y3B} - F_{y4B}) \quad (12)$$

Tyto momenty musí odpovídat momentům, které vytvoří výsledná síla F_{yV} působící v bodě P_{AB} vzhledem k bodu O_{AB} :

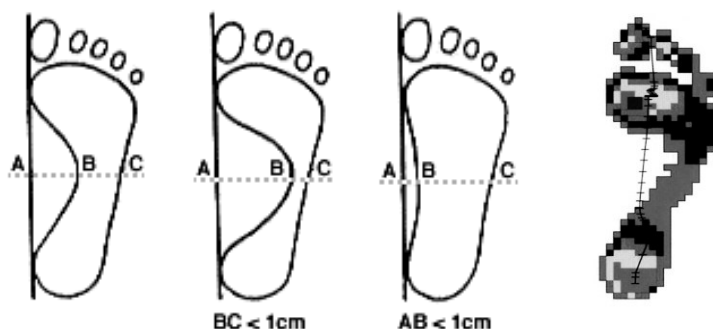
$$M_{xAB} = p_{zAB} \cdot F_{yV}, \quad M_{zAB} = p_{xAB} \cdot F_{yV} \quad (13)$$

Řešením výše uvedených rovnic určíme M_{xAB}, M_{zAB} a pomocí těchto momentů hledanou polohu působišť p_{xAB}, p_{zAB} výsledné kontaktní síly F_{yV} , přičemž toto působišť odpovídá GCoM (COP) celého těla v případě statické stability.

Hodnocení opěrné plochy chodidla

Důležitou informací pro lékaře je také rozložení tíhy těla resp. distribuce reakční síly na ploše chodidla, tzv. pedobarografie, obr.9. Obvykle je např. nutné zajistit, aby nedocházelo k otlačení částí chodidla, které na přenášení tíhy těla nejsou uzpůsobeny. Typickým lékařským problémem jsou tzv. ploché nohy. Je-li šířka klenby chodidla (AB) na její nejširší části u dospělé osoby menší než 1 cm, je noha obvykle považována za plochou. Pokud je šířka otisku chodidla na jeho nejúžší části (BC) menší než 1 cm, je považováno chodidlo za vypouklé. Všechny ostatní stopy chodidel jsou považovány za „normální“ v souladu s klasickou typologií. Vznik ploché nohy je dán tím, že vysoká zátěž, tj. síla přenášená chodidlem musí být přenášena větší plochou na terén, aby na chodidlo s malou kontaktní opěrnou plochou nepůsobil velký tlak. Plochou nohou se opěrná plocha chodidla zvětší, a tím se tlak od tíhové síly sníží, problém však je, že se pak na přenášení síly podílí také anatomické části, které k tomu nejsou určeny. Pro hodnocení, zdali se jedná o ploché či vypouklé chodidlo, stačí vyhodnotit rozložení síly pod jednotlivými částmi chodidla pomocí jednoho či několika čidel síly, obr.9:

- Ve vzdálenosti $AB < 1\text{cm}$ detekují čidla sílu přenášenou chodidlem na plošinu – jedná se o ploché chodidlo.
- Ve vzdálenosti $BC < 1\text{cm}$ nedetekují čidla sílu přenášenou chodidlem na plošinu – jedná se o vypouklé chodidlo.
- Ve vzdálenosti $AB > 1\text{cm}$ nedetekují čidla sílu přenášenou chodidlem na plošinu a současně ve vzdálenosti $BC > 1\text{cm}$ detekují čidla sílu přenášenou chodidlem na plošinu – jedná se o zdravé chodidlo.



Obr.9: Hodnocení opěrné plochy chodidla a záznam z tlakové desky, (převzato z propagačních materiálů firmy Tekscan).

Pro účely vyšetření rozložení tlaku mezi chodidlem a plošinou jsou v praxi používány tzv. tlakové desky či pedografy. Moderní tlakové desky pracují většinou na principu piezoelektrických krystalů. Měření se odborně nazývá počítačová pedobarografie. Metoda spočívá ve sledování rozložení tlaků na ploše chodidel. Zařízení lze ale také využít pro měření COP resp. GCoM při stožení i chůzi a analyzovat zatížení různých partií chodidla při stožení, došlapu, přenosu váhy i odvíjení chodidla do další pohybové fáze kroku.

3.10 Forenzní biomechanika a hodnocení úrazů

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Ověřte platnost empirického výpočtu pro určení tělesné výšky z délky stopy.
- 2) Určete hodnotu *HIC* a *GAMBIT* kritéria pro měřené pohyby figuríny použitím inerciálních či kamerových systémů.
- 3) Určete hodnoty *NIC* a N_{ij} kritéria pro zvolené pohyby figuríny, měřte inerciálním či kamerovým systémem, a popř. dynamometry.
- 4) Definujte hodnoty *THI*, *AIS*, *VC* a *CTI* pro měřené pohyby figuríny použitím inerciálních či kamerových systémů.
- 5) Naleznete hodnotu *TI* kritéria pro zvolený pohyb figuríny, měřte inerciálním či dynamometrickým systémem.

Teoretický základ řešených úloh

Forenzní biomechanika je vědní obor, který aplikuje biomechaniku a biomechanické metody na zkoumání v kriminalistice. Především aplikuje biomechaniku a její metody poznání na dva důležité směry zkoumání a to kriminalistické stopy s biomechanickým obsahem a kriminalisticky relevantní změny, které vznikly v důsledku mechanické interakce systému „člověk-okolí“. Nejčastěji řešenými okruhy jsou:

- Biomechanika pádu z výšky – posuzování zavinění cizí osobou, působení vnější síly;
- Extrémní dynamické zatěžování organismu – zpravidla údery do hlavy, posuzování otázky tolerance organismu, přežití, vzniku fraktur lebečních kostí;
- Pád ze stoje na zem, pád ze schodů – posuzování průběhu pádu, možnost cizího zavinění, příčiny pádu;
- Biomechanická analýza chůze – identifikace osoby podle stereotypu chůze, stanovení antropometrických (geometrických) údajů/charakteristik osob;
- Analýza střetného boje – stanovení reakčních časů, možnosti silového působení, reálnost obranných reakcí;
- Dopravní nehody – mechanické působení na účastníky dopravní nehody uvnitř vozidla a mechanické působení na sražené osoby;
- Bodnutí nožem – silové působení při bodnutí, možnost účasti druhé osoby, stanovení síly na probodnutí a způsobení zranění;
- Biomechanický obsah trasologických stop lokomoce – odhad antropometrických údajů (např. tělesné výšky) pachatele a způsobu lokomoce podle zanechaných stop lokomoce.

Typickým kriminalistickým případem je například otázka výpočtu tělesné výšky z délky stopy, popř. délky bosé nohy (plantogramu) dle experimentálně zjištěného vztahu z antropometrie:

$$v_T = 95,60 + 2,88 \cdot d_n, \quad (1)$$

kde v_T je výška postavy muže a d_n je změřená délka otisku bosé nohy muže. Obdobně by se spočetla výška postavy ženy ze změřené délky otisku bosé nohy ženy:

$$v_T = 91,10 + 2,84 \cdot d_n. \quad (2)$$

Speciálním problémem je pak například analýza poranění při nehodách. Jedná se o soubor specifických metod hodnocení, které jsou často v praxi využívány. S ohledem na popis poranění během nehod byla zavedena tzv. kritéria poranění. Kritérium poranění definuje vztah mezi fyzikálními parametry, jakými jsou např. rychlost nárazu nebo síla působící na lidské tělo, a pravděpodobností výskytu jistého poranění. Kritéria dělíme na kritérium poranění, kritérium porušení a kritérium ochrany. Kritérium poranění se převážně získává na základě výzkumu vzorku živé tkáně. Kritérium porušení souvisí s mrtvou tkání. Kritérium ochrany určujeme na základě experimentů s mechanickými figurínami, [12].

Vzhledem k tomu, že není možné podrobně a konkrétně popisovat všechna možná poranění, která mohou nastat, byla v roce 1969 definována stupnice *AIS* (Abbreviated Injury Scale), která popisuje zranění hodnotami od nuly do šesti. *AIS* je průběžně aktualizován, každé části těla se v rámci *AIS* týká specifický popis, tj. hodnocení, a je vytvořen na základě zdravého dospělého jedince. Nula ve stupnici definuje „žádné poranění“ a šestka znamená „poranění neslučitelné se životem“. Jelikož se stupnice *AIS* liší pro jednotlivé části těla, byla zavedena hodnota *MAIS*, která reprezentuje maximální *AIS*, tj. obsahuje maximum za všechny části těla. Další ukazatelem zranění je *ISS* (Injury Severity Score). *ISS* dělí tělo opět na části hlava a krk, obličej, hrudník, břicho, končetiny včetně pánve a vnějšího povrchu částí těla. *ISS* respektuje také například škrábance a popáleniny. *ISS* je soumou druhých mocnin maxim *AIS* tří nejvíce zraněných částí *A*, *B*, *C* na těle:

$$ISS = A^2 + B^2 + C^2, \quad (3)$$

ISS může nabývat hodnot od 0 do 75, pro maximální hodnoty 5 *AIS* v případě přežití nehody.

Existuje také měřítko zohledňující dlouhodobý vývoj pacienta s ohledem na cenu léčení, rehabilitace a pracovní neschopnosti. Tato stupnice byla nazvána *ICS* (Injury Cost Scale). Fyzikálními parametry, které se na popisu v hodnotící stupnici podílejí, jsou většinou snadno měřitelné veličiny jako zrychlení, rychlost, atd. Vzhledem k jednoduchosti je ukazatel využíván např. pro soudní znalce, [12].

S ohledem na rozdílnost populace existují i metody škálování. Škálováním se myslí odvození parametrů pro jedince, který se liší od daného jedince, na kterém bylo provedeno experimentální měření nebo simulace, na základě jeho rozdílných antropometrických nebo jiných vlastností. Typickým případem škálování je tvorba modelu dětí na základě modelu dospělého jedince. Škálovat se dají modely, výsledky i kritéria poranění.

Hodnota <i>AIS</i>	Váženost poranění
0	Žádné (none)
1	Menší (minor)
2	Mírné (moderate)
3	Vážné (serious) – neohrožující život
4	Těžké (severe) – ohrožující život
5	Kritické (critical) – přežití je nejisté
6	Smrtelné (fatal)

Tab.1: Stupnice poranění *AIS*, [12].

Při tvorbě kritérií poranění je třeba mít vždy na paměti anatomii a fyziologii dané části těla, jeho mechanickou odezvu a odolnost, a mechanismy, které poranění způsobují. Pro studium a určení mechanické odezvy je nutno rozlišovat statickou a dynamickou zátěž. Existují čtyři základní přístupy ke studiu biomechaniky poranění, studuje se: mechanismus poranění, mechanická odezva, tolerance lidského těla a simulace nárazu na lidské tělo. [12].

Hodnocení poranění hlavy

Mechanismy, které poranění hlavy způsobují, jsou deformace od nárazu, tlakové vlny, příliš velký relativní pohyb hlavy vůči krku, gradient tlaku, atp. Prvním a dodnes nejčastěji používaným kritériem pro hodnocení úrazu hlavy je *HIC* (Head Injury Criterion): [12],

$$HIC = \left\{ (t_2 - t_1) \cdot \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \right]_{\max}^{2,5} \right\}, \quad (4)$$

kde $a(t)$ je zrychlení v místě těžiště hlavy v závislosti na čase a t_1 a t_2 jsou časové okamžiky z intervalu měření (obvykle je předpokládán časový interval 15 ms). Např. evropský standard *ECE*

předpokládá časový interval mezi t_1 a t_2 dlouhý 36 ms. Toto kritérium je také často označované jako *HIC36*.

Dalším kritériem poranění hlavy je a_{3ms} , které udává maximální hodnotu zrychlení, jež trvalo alespoň 3ms. Pro testování motocyklistických přileb se využívá obdobné kritérium a_{5ms} a podle *ECE R22* by mělo být splněno $a_{5ms} < 150g$. Kritériím poranění hlavy se často vytýká, že neberou v úvahu úhlové zrychlení. V poslední době se však tato veličina bere v úvahu, protože respektuje mechanismus vzniku smykových sil působících na mozek. Kritérium poranění *GAMBIT* (Generalized Model for Brain Injury Threshold) kombinuje úhlové a translační zrychlení jako:

$$GAMBIT = \left[\left(\frac{a(t)}{a_c} \right)^n + \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\ddot{\varphi}_c} \right)^m \right]^{\frac{1}{k}}, \quad (5)$$

kde $a(t)$ a $\ddot{\varphi}(t)$ jsou translační a rotační zrychlení. a_c a $\ddot{\varphi}_c$ reprezentují kritickou hranici velikosti translačního a úhlového zrychlení. Konstanty m , n a k jsou určeny např. experimentálně ($m=n=k=2$).

Hodnocení poranění páteře

S ohledem na poranění páteře mají největší význam poranění krku, protože úzce souvisejí s poraněním hlavy. Poranění vzniká obvykle od nadměrného ohybu, stlačení, tažení, krutu, smyku a jejich kombinací. Vzhledem ke komplexnosti krku kritéria poranění většinou platí pouze pro konkrétní případy (čelní nebo boční náraz atd.) ve srovnání s hlavou, kde kritérium *HIC* lze použít do všech směrů. V roce 1996 bylo navrženo kritérium poranění krku *NIC* (Neck Injury Criterion), [12],

$$NIC(t) = 0,2 \cdot a_{rel}(t) + (v_{rel}(t))^2, \quad (6)$$

které popisuje relativní pohyb hlavy vůči hrudníku, resp. vůči prvnímu hrudnímu obratli (Th1 vertebra). Jedná se o kritérium pro čelní pohyb a a_{rel} a v_{rel} jsou relativní zrychlení a relativní rychlost v čelním směru. Během pohybu hlavy vůči hrudníku se projevuje také druhá fáze pohybu - švih dozadu. Proto se kritérium *NIC* využívá pouze pro prvních 150ms. Kritérium zohledňující silové a momentové účinky je např. kritérium poranění N_{ij} dané vztahem:

$$N_{ij}(t) = \frac{F_x(t)}{F_{int}} + \frac{M_y(t)}{M_{int}}, \quad (7)$$

kde $F_x(t)$ a $M_y(t)$ jsou síla a moment v příslušném směru, ve jmenovateli se objevují jejich kritické hodnoty použité pro normalizaci. První část indexu v označení N_{ij} představuje směr momentu resp. otáčivého pohybu (f : flexe, e : extenze) a druhý udává směr síly (a : anterior, p : posterior).

Hodnocení poranění hrudníku

Mechanismem poranění hrudníku bývá většinou tupý náraz. Biomechanická odezva hrudníku se získává čelními a bočními testy. Používané kritérium poranění pro čelní náraz je $a_{3ms} < 60g$. Pro boční náraz se využívá kritérium *TTI* (Thoracic Trauma Index), [12],

$$TTI = 1,4 \cdot AGE + \frac{1}{2} \cdot (a_{max}^{rib} + a_{T12}^{lspine}) \cdot \frac{m}{m_{std}}, \quad (8)$$

kde *AGE* je věk subjektu (v letech); a_{max}^{rib} představuje maximální absolutní hodnotu zrychlení na 4. a 8. žebro ve směru bočního nárazu; a_{T12}^{lspine} představuje maximální absolutní hodnotu bočního zrychlení 12. hrudního obratle; m označuje hmotnost subjektu; m_{std} odkazuje na hmotnost průměrného jedince, tj. 75kg.

Další významné kritérium je kritérium stlačení hrudníku, které zohledňuje možnost zranění kompresí. Pro stlačení, označené C , definované jako velikost deformace (hloubka stlačení) hrudníku dělená tloušťkou hrudníku, byl stanoven následující vztah:

$$AIS = -3,78 + 19,56 \cdot C. \quad (9)$$

Pouhé stlačení je ovšem opět zavádějící, neboť odezva hrudníku na náraz velmi závisí na rychlosti stlačování. S ohledem na toto bylo navrženo Viskózní kritérium poranění hrudníku:

$$VC = v(t) \cdot C(t) = \frac{d[D(t)]}{dt} \cdot \frac{D(t)}{b}, \quad (10)$$

kde v je rychlost stlačování, C je stlačení, D je velikost deformace (hloubka stlačení) a b je počáteční tloušťka trupu. Rozdíl mezi stlačení a hloubkou stlačení je ten, že stlačení může být chápáno jako poměrná či procentuální hodnota.

Obdobným kritériem je kritérium CTI (Combined Thoracic Index). Kritérium kombinuje zatížení stlačení a zrychlení. CTI je určeno vztahem:

$$CTI = \frac{a_{\max}}{a_{\text{int}}} + \frac{D_{\max}}{D_{\text{int}}}, \quad (11)$$

kde a_{\max} je maximální změřené zrychlení páteře po dobu 3ms, a_{int} je kritická mezní hodnota pro 3ms, D_{\max} je maximální změřená hodnota průhybu (hloubky stlačení) hrudního koše a D_{int} je kritická mezní hodnota průhybu. Smyslem CTI je zachycení celé řady možných kombinací zatížení s výskytem obou typů zatížení.

Hodnocení poranění břicha

Břicho je zranitelnější než hrudník, neboť žebra chrání pouze horní oblast jater a sleziny. Dobrým prediktorem poranění se ukázala působící síla. Limitní hodnota síly byla určena experimentálně a je 4,4kN. Obdobně jako u hrudníku je vhodným prediktorem stlačení (pro nízké rychlosti), rychlost (pro vysoké rychlosti) a viskózní kritérium. Součin maximální síly a stlačení břicha také dobře koreluje s poraněními většími než $AIS = 4$, [12].

Hodnocení poranění dolních končetin

Poranění končetin a pánve vznikají především při pádech či přímou nebo nepřímou zátěží. Nepřímou zátěží je myšlena zátěž stehenní kosti např. přes česku. Osoběmu a smykovému zatížení jsou náchylné dlouhé kosti (stehenní a holenní kost). K problematickým poraněním patří poranění kolene, které je velice nestabilním kloubem a obsahuje vazy, které se trhají. Kotník je většinou poraněn s ohledem na jeho meze rotace. U dolních končetin se na poranění výrazně podílí svalová napjatost. Svaly jsou schopné v předpětí generovat jednotky kN, [12]. Z řady experimentů vznikly tolerance pro dolní končetiny, nicméně charakterizují pouze vybrané části končetin, např. maximální síla při stlačení stehenní kosti může dosáhnout 10 kN a pro holenní kost 8 kN. Pro holenní kost bylo navrženo kritérium poranění TI (tibia index):

$$TI = \frac{F}{F_{\text{crit}}} + \frac{M}{M_{\text{crit}}}, \quad (12)$$

kde M je ohybový moment a F tlaková síla. M_{crit} a F_{crit} představují kritické hodnoty 225 N·m a 35,9 kN. Maximální TI měřené na horní a dolní části holenní kosti nesmí překročit 1,3.

Hodnocení poranění horních končetin

Typickými zraněními jsou zlomeniny kostí a pohmožděnin svalů horních končetin. Fyzikálními parametry, které ovlivňují poranění ruky, jsou opět síla a moment. Pro zjišťování kritických zatížení byly prováděny statické a dynamické experimenty. Bylo zjištěno, že během dynamického experimentu horní končetina vydrží asi o 20% nižší sílu než během statického. Kritériem poranění je průměrná rychlost předloktí v distálním směru, jejíž hodnota $10,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dobře koreluje s 50% pravděpodobností zlomeniny, [12].

3.11 Ergonomie a hodnocení fyzické zátěže

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete pro svou postavu vhodné rozměrové parametry konstrukce židle,
- 2) Vyhodnoťte práci, kterou vaše tělo vykonalo při chůzi po vodorovné ploše a při překonání konkrétního převýšení.
- 3) Určete práci vykonanou při stisku ručního dynamometru maximální silou po určitou dobu.

Teoretický základ řešených úloh

Předmětem ergonomie je studium vztahů mezi člověkem, pracovním předmětem a pracovním prostředím, tj. pracovních systémů, nebo též systémů člověk- technika - prostředí a aplikace příslušných poznatků při projektování. Nerespektování ergonomických požadavků může mít negativní vliv na zdraví. Je to např. zvýšený počet pracovních úrazů, potíže a onemocnění svalově kosterního aparátu, přetížení svalových skupin v důsledku jednostranné, dlouhodobé a nadměrné svalové zátěže, atd. Při nedodržení ergonomických parametrů může docházet ke zhoršení výkonnosti pracovníka a kvality práce.

Statická práce svalů

Udržení rovnováhy a orientace těla v prostoru jsou dány složitým systémem reflexů, které přes centrální nervový systém přizpůsobují svalový tonus určité poloze. Reflexy vzpřimovací zapojují svalstvo, umožňující udržení vzpřímené polohy (tzv. antigravitační svaly), reflexy tonické zajišťují udržení základní polohy těla, reflexy stabilizační zabezpečují stabilitu těla při náhlém vychýlení. Přitom se zvyšuje tonus svalů a objevují se zřetelné korekční pohyby. Těžiště těla pohodlně stojícího člověka je asi v 54 až 57 % výšky těla (přibližně ve výši prvních sakrálních obratlů). Přejít do jiné polohy (předklon, podřep) vyvolá stabilizační reakci spojenou se zvýšenou aktivitou svalstva dolních končetin a trupu. Základní poloha těžiště se změní tak, aby těžiště procházela tzv. oporou. Jinak by nastalo nebezpečí pádu, [13, 14].

Izometrický svalový stah se uplatňuje ve větší či menší míře u každé činnosti, zejména tehdy, jde-li o působení síly v čase. Izometrický stah posturálních svalů zajišťuje polohu těla a vzájemné postavení hlavy a končetin vůči trupu. Statická práce drobných svalů ruky např. umožňuje držení nástrojů a náradí, je využívána při manipulaci s břemeny a u těch pracovních operací, kde je třeba vynaložení síly. Obecně se počítá s tím, že maximální síla odpovídajících svalových skupin je u žen o 20-30 % nižší než u mužů a u obou pohlaví dochází k poklesu s věkem, a to zhruba o 2,5 % na každé pětiletí od 25. roku.

Při hodnocení statické zátěže je nutno znát polohu těla při práci (vstoje, vsedě) a postavení horních a dolních končetin vzhledem k trupu a vzájemné postavení jednotlivých segmentů končetin, [13, 14].

Polohu horních končetin popisujeme pomocí úhlů s vrcholem ve středu ramenního kloubu ve třech na sebe kolmých rovinách, úhlem ohnutí v loketním kloubu, popřípadě úhlem ohnutí zápěstí (úhel dorzální flexe). U dolních končetin studujeme vzájemné postavení končetin při poloze vstoje. Vsedě pak záleží na úhlu v kyčelním, kolenním a hlezenním kloubu, a dále na úhlu odklonu páteře od kolmice a na úhlu náklonu hlavy.

Ergonomie sezení

Druhou nejčastější polohou, vhodnou všude tam, kde není třeba velkého rozsahu pohybů a kde je zanedbatelná vynakládaná síla resp. mechanická práce, je poloha vsedě. Z čistě fyziologického hlediska je pro většinu lidí při práci výhodnější sed - především proto, že je energeticky méně náročný a dolní končetiny nejsou trvale zatíženy jako při stoje. Pro správné pochopení problematiky sezení je nutné definovat ideální sed, a jak se při posazení mění poloha částí těla vůči sobě. Z anatomického hlediska je sed podmíněn konkávním (vydutým) zakřivením páteře v oblasti krční

a bederní (jako při stoji) a stehna nesvírají s trupem úhel větší než 135° . Pánev je sklopena dozadu a mění se úhel v kyčelním kloubu (ze 180° na přibližně 90°). Volná (pohodlná, relaxovaná) poloha vsedě vyžaduje mírné napětí zádových svalů, které lze omezit vhodně konstruovanou opěrkou, [13, 14].

Při strnule vzpřímeném sezení, při soustředěné činnosti či při sezení na nevhodné židli se svalový tonus zvyšuje. Nesprávné držení vede k omezenému dýchání, stlačení břišních orgánů, přetěžování některých svalů a vazů nebo naopak k ochabování svalstva, které následně nedokáže poskytnout dostatečnou oporu kloubům a páteři. Může také docházet ke zvýšenému tlaku na meziobratlové ploténky bederní páteře, což může vést až k výhřezu ploténky.

Z uvedeného je zřejmé, že pro zdraví člověka je důležité si židli správně vybrat a nastavit podle typu práce a podle postavy člověka. Konstrukce sedadel musí zajišťovat pevnost a stabilitu v potřebné pracovní poloze se zřetelem na vnější síly a momenty působící na sedadlo a sedícího člověka (včetně sil, které člověk sám při práci vynakládá) a rozsah pracovních pohybů. Síly, kterými člověk působí a které člověk vytváří směrem na konstrukci sedadla, musí být v rovnováze se silami reakčními, tj. výsledná vnější síla \vec{F} působící na konstrukci sedadla musí být rovna výsledné reakci v opěrných částech konstrukce sedadla \vec{R} , ale bude mít opačný směr:

$$\vec{F} = -\vec{R} \quad (1)$$

Výška manipulační roviny (místo, na kterém se nejčastěji vykonávají pohyby ruky v souvislosti s pracovní činností) má být přizpůsobena druhu činnosti. Pro práci vsedě je obvykle 65 cm pro ženy a 70 cm pro muže. Používané sedadlo má mít nastavitelnou výšku v rozmezí 38 až 48,5 cm. Přesné požadavky na uspořádání pracovního místa jsou uvedeny v hygienických předpisech.

Sedací plocha sedadla by neměla být tak vysoká, aby stlačovala spodní části stehna (pak by docházelo k narušování krevního oběhu), ale ani tak nízká, aby docházelo k velkému prohnutí zad. Nejčastěji se doporučuje výška o 3 až 5 cm nižší, než je výška podkolenní rýhy. Při sezení s plně opřenými zády se chodidla o podlahu opírají celou plochou. Správnou výšku sedadla ovlivňuje i výška pracovní plochy a rozdíl mezi výškou sedadla a pracovní plochy, který má být cca 27 až 29 cm. Židle mají většinou nastavitelnou výšku v rozsahu 37 až 52 cm. Vhodnou výšku sedačky lze přibližně spočítat pomocí vzorce:

$$v_s = 0,25 \cdot (v_T + v_p), \quad (2)$$

kde v_s je výška sedadla, v_T je výška osoby, v_p je výška podpatku. Pokud není výška podpatku změřena, počítá se obvykle s výškou 5 cm pro ženu a 3 cm pro muže. Samozřejmě se ale definitivní výška určuje podle druhu práce člověka během sezení a od optimální se liší v souladu s dalšími požadavky. Existují také speciální ergonomické židle pro dlouhodobé sezení, které zajišťují dynamické sezení i správné podepírání celého těla vsedě.

Určení fyzické zátěže při chůzi

V oblasti ergonomie práce se setkáváme s výpočtem fyzické zátěže. Existuje celá řada metod výpočtů, přičemž se především vychází z hodnocení fyzické práce, která je vynaložena při konání konkrétního úkonu. Při výpočtu se zohledňují fyzikální charakteristiky, jako jsou např. hmotnosti břemen, s kterými je manipulováno, hmotnosti segmentů těla, poloha segmentů těla, atd. Předpokládáme, že fyzická práce bývá obecně složena ze dvou částí

$$W^F = W^D + W^S, \quad (3)$$

kde W^D je dynamická práce (chůze, manipulace s břemenem, atp.) a W^S je statická práce (držení těla při extrémní poloze těla a jeho částí, držení břemen, tlak, stisk, atp.). Konkrétním příkladem výpočtu může být určování dynamické práce při chůzi po rovině experimentálně určeným vztahem:

$$W_{CH}^D = m_T \cdot g \cdot 0,03 \cdot V_T \cdot k_N \cdot \frac{l_C}{l_K} \cdot \frac{1}{\eta}, \quad (4)$$

kde m_T je hmotnost těla v kg, g je gravitační zrychlení, V_T výška těla v m, k_N je koeficient negativní práce ($1,33=4/3$), l_C je celková délka chůze v m, l_K je délka kroku v m daná rychlostí chůze a η je tzv. účinnost těla při chůzi (0,2 až 0,3). V případě chůze s překonáváním určité výšky, tj. převýšení, je experimentální vztah upraven:

$$W_{CHv}^D = W_{CH}^D + W_v^D = W_{CH}^D + m_T \cdot g \cdot l_v \cdot k_N \cdot \frac{1}{\eta}, \quad (5)$$

kde W_v^D je práce vynaložená na překonání převýšení, l_v je celková překonaná výška chůze v m. Koeficient $k_N = 1,33$ za předpokladu překonání převýšení, tj. vždy během chůze pohyb nahoru a následně dolů. Pokud se jedná pouze o chůzi do kopce je $k_N = 1$, pokud z kopce je $k_N = 0,33$. Pro další případy fyzické zátěže vztahy vychází z obdobných předpokladů, jak bylo na příkladu uvedeno, pro výpočty jsou sestrojeny podrobné tabulky ergonomických výpočtů, [13, 14].

Práce konaná horní končetinou

V ergonomii jsou navrženy také metody orientačních výpočtů práce pro jednotlivé části těla. Příkladem může být experimentální orientační vztah pro výpočet statické práce např. horní končetiny při stisku, tlaku, atp.:

$$W_v^S = F \cdot k_Z \cdot k_{PP} \cdot k_V \cdot \frac{1}{\eta_S}, \quad (6)$$

kde F je vyvíjená (změřená) síla, k_Z je koeficient zapojení částí těla, k_{PP} je koeficient polohy paže, k_V je koeficient vynakládání statické práce (roven počtu sekund), η_S je tzv. účinnost statické práce 0,15, [13, 14].

Sílu vyvíjí	k_Z
celé tělo	1
obě nohy	2
noha	3
obě paže	4
paže	5
dvě ruce	6
jedna ruka	7
prsty	8
prst	10

Tab.1: Koeficienty zapojení částí těla, [13].

Poloha paže	k_{PP}
svisle dolů až do úrovně výšky srdce (výška srdce je cca 70% výšky těla vestoje)	1,0
horizontálně, v rovině ramene	1,2
nad horizontálou 15^0	1,5
nad horizontálou 30^0	2,1
nad horizontálou 45^0	3,2
nad horizontálou 60^0	5,6
nad horizontálou 75^0	10,5
nad horizontálou 80^0	22
nad horizontálou 85^0	45
nad horizontálou 90^0	270

Tab.2: Koeficienty polohy paže, [13].

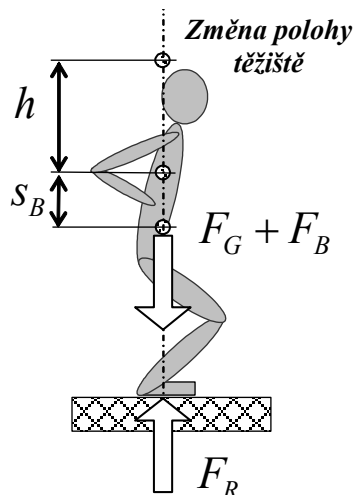
3.12 Dynamika skoku do výšky

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Stanovte maximální velikost síly svalů a její průměrnou hodnotu.
- 2) Porovnejte velikosti sil na plošině pro skok snožmo a na jedné noze, a bez a se zátěží (např. batohem).
- 3) Určete přibližnou velikost impulzu síly svalů pro konkrétní typ skoku.
- 4) Určete přibližně práci a výkon svalů pro konkrétní typ skoku.
- 5) Určete za zjednodušujících předpokladů dosaženou maximální výšku vybraného typu skoku.

Teoretický základ řešených úloh

Ve sportovní biomechanice a ergonomii se můžeme setkat s měřením dynamiky pohybu siloměrnou deskou. Při měření zjišťujeme průběh velikosti celkové síly pod chodidly například během chůze po rovině, výskoku, chůzi po schodech, atd. Základní analýzou naměřených hodnot velikosti celkové síly pod chodidly lze například určit impulsy síly, rychlost výskoku při odrazu a odtud výšku skoku. Z grafu závislosti velikosti síly na čase lze určit závislost změny rychlosti pohybu na čase. Sestrojením závislosti síly na změně polohy těžiště lze určit vykonanou práci a výkon.



Obr.1: Změna polohy těžiště a silové účinky při výskoku.

Přibližné určení síly, práce a výkonu svalů

Využitím druhého a třetího Newtonova zákona lze, za zjednodušených předpokladů, určit sílu působící vertikálně na podložku, která je generována svalstvem, obr.1:

$$0 = F_R - F_G - F_B \Rightarrow F_B = F_R - F_G, \quad (1)$$

kde síla F_R je reakční síla změřena pomocí siloměrné podložky a $F_G = m \cdot g$ je tíhová síla. Necht' celková vykonaná práce svalů je dána obecným vztahem:

$$W_B = \int_{s_0}^{s_B} F_B \cdot ds. \quad (2)$$

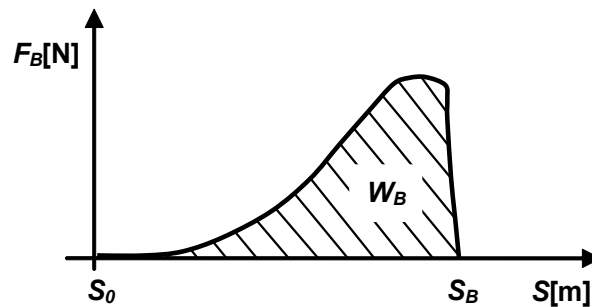
Za zjednodušujících předpokladů konstantní velikosti F_B je vykonaná práce svalů:

$$W_B = F_B \cdot s_B,$$

kde s_B je hloubka podřepu, resp. dráha vykonaná těžištěm během odrazové fáze. Průměrný výkon svalů skokana určíme vztahem:

$$P_B = \frac{W_B}{t_B}, \quad (3)$$

kde t_B je doba odrazové fáze, za kterou byla práce vykonána, tj. doba působení svalů z podřepu až do odrazu, a lze ji měřit siloměrnou deskou.



Obr.2: Určení práce svalů při odrazu.

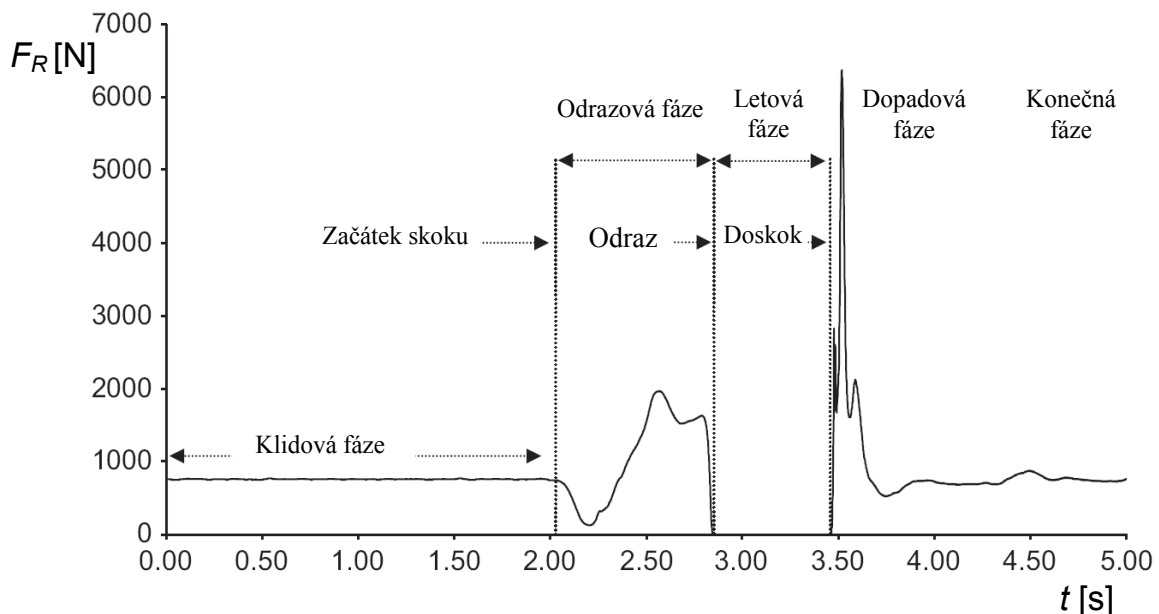
Určení kinematických veličin pohybu

Víme, že impulz síly je:

$$\vec{I}_B = \int_{t_0}^{t_B} \vec{F}_B \cdot dt \quad (4)$$

a za zjednodušujících předpokladů konstantní velikosti \vec{F}_B tedy:

$$\vec{I}_B = \vec{F}_B \cdot t_B. \quad (5)$$



Graf 1: Typický průběh silových účinků měřených siloměrnou odrazovou deskou při skoku.

Neboť je impulz síly roven změně hybnosti tělesa, pak můžeme psát za předpokladu $v_0 = 0$ počáteční nulové rychlosti tělesa, že v okamžiku odrazu:

$$\vec{F}_B \cdot t_B = m \cdot \vec{v}_B, \quad (6)$$

a odtud tedy rychlost v okamžiku odrazu:

$$\vec{v}_B = \frac{\vec{F}_B \cdot t_B}{m}. \quad (7)$$

Rychlost v okamžiku odrazu také můžeme určit z předpokladu, že změna kinetické energie je rovna práci, a neboť $v_0 = 0$, pak:

$$E_k = W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}_B^2, \quad (8)$$

a odtud velikost rychlosti v okamžiku odrazu:

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{\frac{2 \cdot W_B}{m}}. \quad (9)$$

Pokud je zrychlení dáno obecným vztahem:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (10)$$

pak je, za předpokladu zjednodušení tj. rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu, zrychlení:

$$a_B = \frac{v_B}{t_B}. \quad (11)$$

Pokud je v letové fázi po odrazu velikost okamžité rychlosti ve směru osy y:

$$v = v_B - g \cdot t, \quad (12)$$

pak pro maximální výšku výstupu, kde je okamžitá rychlost tělesa nulová, platí:

$$0 = v_B - g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_B}{g}, \quad (13)$$

a odtud určíme po dosazení do rovnice pro svislý pohyb maximální dosaženou výšku výskoku:

$$y_{\max} = h = y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_B^2}{g}. \quad (14)$$

Pokud víme, že síly svalů pohybují tělem člověka a konají práci, pak práce svalů je rovna změně potenciální polohové energie těla během pohybu a můžeme psát:

$$W_B = E_p \quad (15)$$

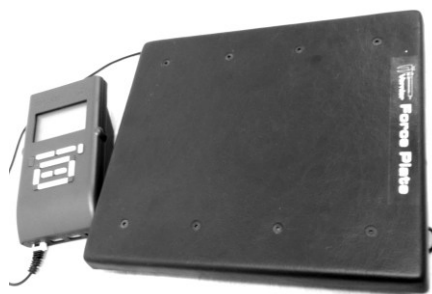
a úpravou vztahu:

$$s_B \cdot F_B = (s_B + h) \cdot F_G, \quad (16)$$

kde h je výška skoku, tj. rozdíl polohy těžiště skokana před podřepem a při dosažení maximální výšky skoku. Odtud za zjednodušujících předpokladů víme, že svalová síla:

$$F_B = \left(\frac{s_B + h}{s_B} \right) \cdot F_G \Rightarrow h = \frac{s_B \cdot (F_B - F_G)}{F_G}. \quad (17)$$

K měření síly můžeme použít běžné robustnější váhy nebo tzv. odrazových desek sloužících k určení sil pod chodidly a připojených k PC z důvodu záznamu a analýzy dat. Výstupem je obvykle záznam průběhu velikosti síly na čase, a z toho odvozené a vypočtené výše uvedené charakteristiky.



Obr.3: Siloměrná odrazová deska firmy Vernier s jedním vážním čidlem uprostřed desky.

3.13 Silové účinky při pohybu na lyžích

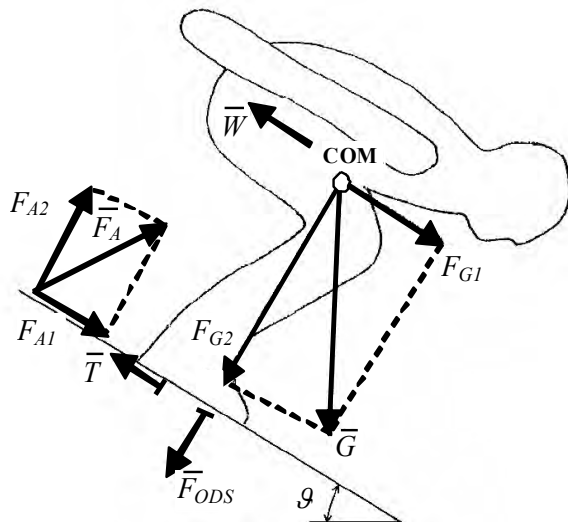
Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete přibližnou velikost plochy čelního průřezu lyžaře ve směru jízdy a odhadněte pro konkrétní rychlost pohybu velikost odporu prostředí.
- 2) Pomocí matematicko-fyzikálních tabulek určete velikosti třecích sil pro různé druhy povrchů tratě.
- 3) Určete velikost maximální rychlosti pohybu lyžaře pro různé úhly sklonu sjezdové tratě.

Teoretický základ řešení úloh

Pohyb na lyžích využijeme k popisu sil, které mohou obecně působit na jakýkoliv pohybující se objekt, tudíž i na sportovce konající sportovní činnost obdobného charakteru, jako je jízda na lyžích, jízda na kole, rychlobruslení, atp.

Typickým způsobem lyžování je sjezdové a běžecké lyžování, která budou základem níže uvedeného popisu. Je třeba si však uvědomit, že problematika lyžování je mnohem složitější, než bude popsáno, především u akrobatického lyžování, skoků na lyžích, atd.



Obr.1: Vybrané síly působící na pohybujícího se lyžaře.

Silové účinky při pohybu na lyžích

Při jízdě působí na lyžaře akční síla \vec{F}_A generovaná jeho svaly, odstředivá síla \vec{F}_{ODS} , tíhová síla \vec{G} , třecí síla \vec{T} a odpor prostředí \vec{W} . Pro zjednodušení dále předpokládejme, že bude $|\vec{F}_{ODS}|=0$, tj. lyžař se bude pohybovat přímočarým pohybem, a budeme řešit pouze 2D úlohu v sagitální rovině těla lyžaře.

Akční síla \vec{F}_A je síla, kterou vytváří lyžař svým svalovým systémem prostřednictvím např. lyžařských holí. Obecně se jedná o sílu přispívající k dopřednému pohybu a odlehčování/odrazu, ale může se také jednat o sílu působící proti pohybu při brzdění. Tato síla se může rozkládat na dvě složky F_{A1} a F_{A2} . F_{A2} působí kolmo na sjezdovou dráhu a síla F_{A1} je rovnoběžná s tratí a uděluje lyžaři zrychlení ve směru jízdy. Velikost složek je proměnná dle aktuálního sklonu lyžařských holí, atp.

Odstředivá síla vzniká při pohybu lyžaře po křivočaré trajektorii, tj. oblouku sjezdovky, a její velikost je:

$$|\vec{F}_{ODS}| = \frac{m \cdot \vec{v}^2}{r}, \quad (1)$$

kde je m hmotnost lyžaře, \vec{v} je jeho rychlost a r je poloměr zakřivení dráhy pohybu lyžaře. Směr a velikost vektoru této síly se mění v souladu s velikostí poloměru zakřivení a způsobu tohoto zakřivení dráhy, tj. jde-li o konvexní nebo konkávní zakřivení tratě atp.

Tíhová síla \vec{G} působí v těžišti pohybující se soustavy, tj. lyžaře s lyžařskou výbavou, a její velikost určíme vztahem:

$$|\vec{G}| = m \cdot g, \quad (2)$$

kde m je hmotnost závodníka a g je tíhové zrychlení. Sílu \vec{G} můžeme rozdělit na dvě složky a to na F_{G1} a F_{G2} . Síla F_{G1} je rovnoběžná se sjezdovkou/tratí a uděluje lyžaři zrychlení ve směru jízdy:

$$F_{G1} = |\vec{G}| \cdot \sin \vartheta. \quad (3)$$

Síla F_{G2} působí kolmo na sjezdovku/trat' a její velikost určuje velikost třecí síly. Určíme ji podobným vztahem jako předchozí sílu:

$$F_{G2} = |\vec{G}| \cdot \cos \vartheta. \quad (4)$$

Mezi skluznicí lyží a sněhem na sjezdovce/trati vzniká třecí síla \vec{T} . Její velikost je přímo úměrná součinu kolmé tlakové síly a velikosti součinitele smykového tření μ :

$$|\vec{T}| = (F_{G2} + F_{A2} + F_{ODS}) \cdot \mu. \quad (5)$$

Síla \vec{W} je odporová síla prostředí. Pro výpočet velikosti této síly se použije vztah, který bývá nazýván Newtonovým zákonem odporu:

$$|\vec{W}| = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot S_w \cdot \vec{v}^2, \quad (6)$$

kde c_w je součinitel odporu, který zohledňuje postoj těla a kvalitu povrchu kombinézy lyžaře, ρ je hustota prostředí, S_w je plocha kolmého průřezu lyžaře ve směru jízdy a \vec{v} je jeho rychlost.

Pohybová rovnice pohybujícího se lyžaře bude mít tedy tvar:

$$\vec{F}_{G1} + \vec{F}_{A1} - \vec{W} - \vec{T} = m \cdot \vec{a}, \quad (7)$$

kde \vec{a} je zrychlení, s kterým se bude lyžař pohybovat. Pro další řešení předpokládejme, že se lyžař bude pohybovat na nezakřivené sjezdové dráze a bez vytváření akční síly \vec{F}_A .

Z pohybové rovnice můžeme zjistit maximální možnou rychlost v_{\max} , tj. musí nastat rovnováha sil, zrychlení je nulové a výslednice sil je nulová:

$$F_{G1} - W - T = 0 \quad (8)$$

a po dosazení:

$$|\vec{G}| \cdot \sin \vartheta - \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot S_w \cdot \vec{v}^2 - |\vec{G}| \cdot \cos \vartheta \cdot \mu = 0. \quad (9)$$

Odtud je maximální možná rychlost, resp. velikost maximální rychlosti lyžaře na sjezdové dráze:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot |\vec{G}| \cdot (\sin \vartheta - \cos \vartheta \cdot \mu)}{c_w \cdot \rho \cdot S_w}}. \quad (10)$$

Ze vztahu je patrné, že pro co největší maximální rychlost musí lyžař minimalizovat průřez S_w , součinitel odporu c_w a součinitel smykového tření μ , naopak musíme zvýšit velikost \vec{G} a úhel ϑ sjezdové tratě. Charakteristiky \vec{G} a ϑ jsou těžko ovlivnitelné, naopak S_w , c_w a f jsou charakteristiky, jejichž optimalizaci se věnuje sportovní biomechanika s cílem designu nových kombinéz, hledání vhodných postojů na lyžích atd.

IV. Vybrané úlohy z protetiky

4.1 Tenzometrické systémy a měření zatížení protetických náhrad

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete velikost napětí a deformace pro průřez mezikruží protetické náhrady zatížené na tlak pro různé velikosti zatěžujících sil. Ověřte teoreticky získané výsledky s výsledky měření. Dokažte Hookeův zákon.
- 2) Nalezněte velikost napětí a deformace pro průřez mezikruží protetické náhrady zatížené na ohyb pro různé velikosti ohybového momentu. Ověřte teoreticky získané výsledky s výsledky měření. Dokažte Hookeův zákon.
- 3) Určete velikost napětí a deformace pro průřez mezikruží protetické náhrady zatížené na krut pro různé velikosti kroučícího momentu. Ověřte teoreticky získané výsledky s výsledky měření.
- 4) Určete velikost napětí od smykové síly, kterou modelově vytvoříme tangenciální silou působící kolmo na podélnou osu krátkého nosníku.
- 5) Nalezněte na nosníku, pro různé směry vnější zatěžující síly, velikost a směr hlavních napětí rovinné napjatosti pomocí tenzometrické růžice.

Teoretický základ řešených úloh

Odporová tenzometrie je jedna ze základních metod experimentální analýzy malých i velkých deformací, mechanických napětí, sil, momentů sil, namáhání a ostatních veličin, které můžeme převést na výše uvedené veličiny. Obecně lze považovat použití odporových tenzometrů za velmi efektivní způsob měření poměrných deformací za předpokladu měření okamžitých změn poměrného přetvoření. Odporová tenzometrie je založena na principu změny elektrického odporu tenzometrické známky v závislosti na její deformaci. Znamka je přilepena uvnitř či vně mechanické části v místě, kde se předpokládá největší deformace způsobená silou působící na mechanickou část. Tato deformace se v důsledku pevného spojení známky a těla mechanické části přenesou i na známku, která tímto změnou velikost elektrického odporu.

Charakteristiky a princip tenzometrů

Pro odporový tenzometr resp. vodič platí vztah mezi relativní změnou odporu a poměrným prodloužením nebo zkrácením pro jednoosou napjatost:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \frac{\Delta l}{l} = k \cdot \varepsilon, \quad (1)$$

kde R je elektrický odpor známky resp. vodiče tenzometrické známky; ΔR je změna odporu známky; l je počáteční délka nedeformovaného vodiče známky; Δl je prodloužení (zkrácení) vodiče; ε je poměrná deformace také tzv. přetvoření, a k je koeficient deformační citlivosti, také tzv. deformační součinitel, což je nejdůležitější parametr známky.

Vnitřní zapojení tenzometrického snímače je provedeno Wheatstoneovým můstkem, kde známky (tzv. tenzometry) tvoří část, nebo plný můstek, obr.1:

1/4 můstek: 1 tenzometr měřicí; popř. 1 tenzometr kompenzační - musí být v sousední větvi.

1/2 můstek: 2x tenzometr měřicí; popř. 2x tenzometr kompenzační. Pro dosažení 2-násobku citlivosti:

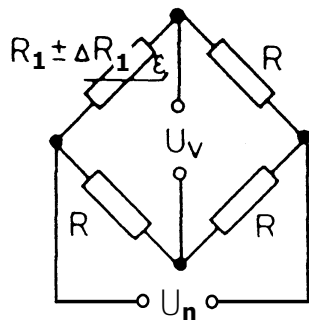
- shodně namáhané tenzometry (tah-tah, popř. tlak-tlak) zapojení do protilehlých větví,
- opačně namáhané tenzometry (tlak- tah) zapojení do sousedních větví.

plný můstek: 4x tenzometr měřicí (zároveň kompenzační). Pro dosažení až 4-násobku citlivosti.

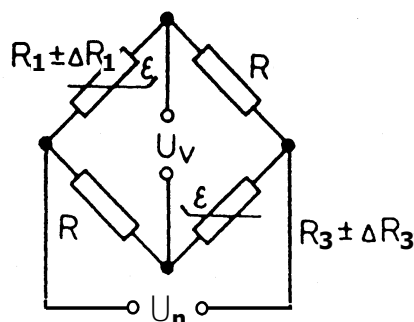
Pro obecný Wheatstoneův můstek můžeme psát vztahy pro Ohmův zákon, obr.2:

$$U_{AB} = I_{ABC} \cdot R_1 = \frac{U_n}{R_1 + R_2} \cdot R_1, \quad (2)$$

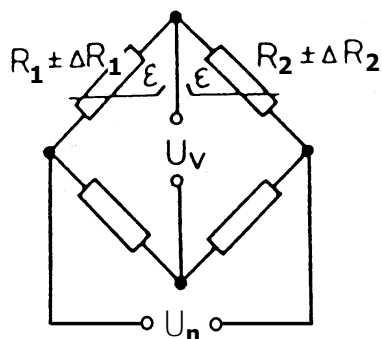
$$U_{AD} = I_{ADC} \cdot R_4 = \frac{U_n}{R_4 + R_3} \cdot R_4. \quad (3)$$



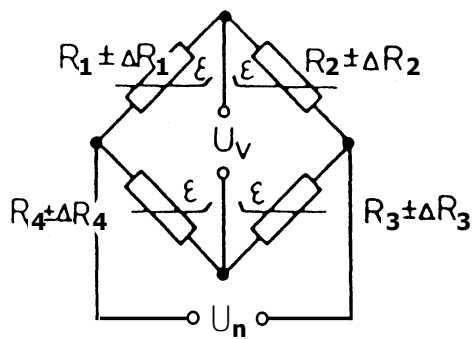
1/4 můstek



1/2 můstek

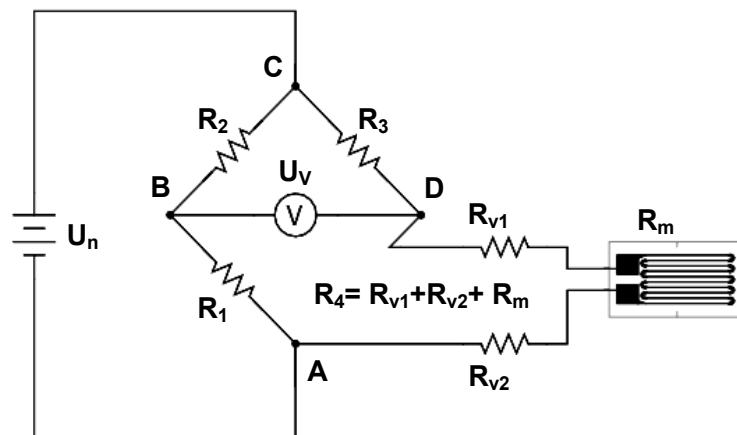


1/2 můstek



plný můstek

Obr.1: Typy zapojení Wheatstoneova můstku pro tenzometrická měření.



Obr.2: Schéma Wheatstoneova můstku s jedním jednoosým tenzometrem (zapojení do 1/4 můstku).

Výstupní napětí U_V je rozdílem napětí mezi body B a D na tzv. výstupní diagonále, obr.2:

$$U_V = U_{AB} - U_{AD} = \frac{U_n}{R_1 + R_2} \cdot R_1 - \frac{U_n}{R_4 + R_3} \cdot R_4, \quad (4)$$

$$U_V = U_n \cdot \frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4}{(R_1 + R_2) \cdot (R_4 + R_3)}. \quad (5)$$

Změna výstupního napětí ΔU_V je obecně způsobena změnou odporů R_1, R_2, R_3, R_4 o $\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R_4$. Takováto změna odporu tenzometru vzniká jeho délkovým přetvořením, nebo změnou teploty. Po dosazení dostáváme:

$$U_V + \Delta U_V = U_n \cdot \frac{(R_1 + \Delta R_1) \cdot (R_3 + \Delta R_3) - (R_2 + \Delta R_2) \cdot (R_4 + \Delta R_4)}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2) \cdot (R_4 + \Delta R_4 + R_3 + \Delta R_3)}. \quad (6)$$

Vztah platí pro předpoklad napájení můstku konstantním napětím U_n . Dalšími úpravami vztahu získáme rovnici, [15]:

$$\frac{\Delta U_V}{U_n} = \frac{r}{(1+r)^2} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \cdot (1-\eta), \quad (7)$$

kde

$$r = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_4}, \quad (8)$$

a nelineární člen

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_4}{R_4} + r \cdot \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} \right)}}. \quad (9)$$

Z výsledku vyplývá, že nelinearita bude pro $r=1$ nulová, pokud: 1) $\Delta R_1 = -\Delta R_2$ při $\Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$, nebo 2) $\Delta R_3 = -\Delta R_4$ při $\Delta R_1 = \Delta R_2 = 0$, případně 3) pokud $\Delta R_1 = -\Delta R_2$ a zároveň $\Delta R_3 = -\Delta R_4$. Tento výsledek je důležitý pro praxi, neboť ukazuje, že se můstek chová lineárně, pokud zapojíme stejné aktivní tenzometry na místech odporů R_1 a R_2 , nebo na místech R_3 a R_4 a dosáhneme v dané dvojici změny odporu s opačným znaménkem (půl můstek), [15]. Nelinearita mizí i v případě, že na místech všech čtyř odporů zapojíme aktivní tenzometry stejného odporu (plný můstek). Při použití pouze jednoho aktivního tenzometru se chová můstek nelineárně, ale pokud je relativní změna odporu aktivního tenzometru malá, nelinearitu zanedbáváme. Pro praxi tedy předpokládáme, že $r=1$ a $\eta=0$ a odtud vztah:

$$\frac{\Delta U_V}{U_n} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (10)$$

a odtud, za předpokladu délkových přetvoření tenzometrů zapojených v jednotlivých ramenech můstku:

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = k \cdot \varepsilon_i \quad (11)$$

můžeme psát:

$$\frac{\Delta U_V}{U_n} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \frac{k}{4} \cdot \varepsilon_V, \quad (12)$$

za předpokladu $k=k_1=k_2=k_3=k_4$ a následnou úpravou dostaneme vztah:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \frac{K_M}{k} \cdot \Delta U_V, \quad (13)$$

kde K_M je konstanta můstku. Výše uvedené výpočty jsou pro zapojení celého (plného) můstku, ale v praxi se používá řada způsobů zapojení tenzometrů, přičemž výpočet je analogický s uvedeným. Způsob zapojení (celý most, půlmůstek, čtvrtmůstek) má vliv na přesnost a stabilitu

měření a je dán možnostmi měření (počet tenzometrů, charakter deformací, možnost zapojení kompenzačního tenzometru, apod.) a možnostmi použité měřicí ústředny. Způsoby zapojení tenzometrů nejvíce ovlivňuje požadavek na to, jaká mechanická namáhání požadujeme měřit, přičemž některými zapojeními můžeme měřit i více typů namáhání.

Hodnocení namáhání taženého/tlačeného prutu

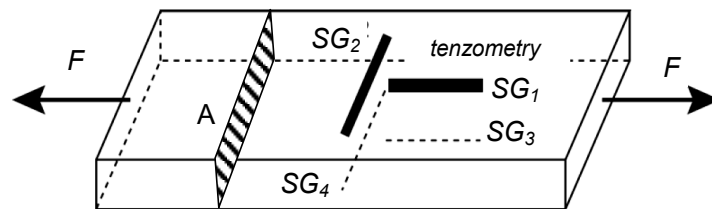
Pro namáhání tahem/tlakem z Hookeova zákona víme, že napětí od normálové síly je:

$$\sigma_n = \varepsilon_n \cdot E, \quad (14)$$

kde ε_n je délkové přetvoření od normálové síly, σ_n je velikost hledaného normálového napětí a E je modul elasticity (Youngův modul pružnosti v tahu). Pro normálové namáhání víme také, že:

$$\sigma_n = \frac{F}{A}, \quad (15)$$

kde F je velikost zatěžující síly a A je průřez namáhaného profilu, který je kolmý na směr zatěžující síly. Z uvedeného je zřejmé, že pokud zjistíme tenzometrickým můstkem ε_n a známe rozměrové a materiálové vlastnosti měřených konstrukčních prvků, můžeme určit σ_n a F .



Obr.3: Schéma zapojení tenzometrů pro měření tahu/tlaku.

Výběr zapojení tenzometrů a výpočet hledaného napětí od normálové síly dle změřeného přetvoření tenzometrů:

Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření	Měřené výstupní elektrické napětí	Normálové napětí od normálové síly
čtvrtmůstek	SG ₁	$\varepsilon_V = \varepsilon_n$	$\Delta U_V = \frac{U_n}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_n$	$\sigma_n = \varepsilon_V \cdot E$
půlmůstek	SG ₁ , SG ₂	$\varepsilon_V = (1 + \mu) \cdot \varepsilon_n$	$\Delta U_V = \frac{(1 + \mu) \cdot U_n}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_n$	$\sigma_n = \frac{\varepsilon_V \cdot E}{1 + \mu}$
plný most	SG ₁ , SG ₂ , SG ₃ , SG ₄	$\varepsilon_V = 2 \cdot (1 + \mu) \cdot \varepsilon_n$	$\Delta U_V = \frac{(1 + \mu) \cdot U_n}{2} \cdot k \cdot \varepsilon_n$	$\sigma_n = \frac{\varepsilon_V \cdot E}{2 \cdot (1 + \mu)}$

Tab.1: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tensometrů - tah-tlak, [9].

Hodnocení namáhání ohýbaného prutu

Velikost normálového napětí od ohybového momentu je určena vztahem:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}, \quad (16)$$

kde M_o je ohybový moment působící na část konstrukce v místě umístění tenzometrů a W_o je průřezový modul v ohybu daný rozměrovými parametry a tvarem průřezu testovaného profilu části konstrukce. Modul průřezu W_o má hodnoty:

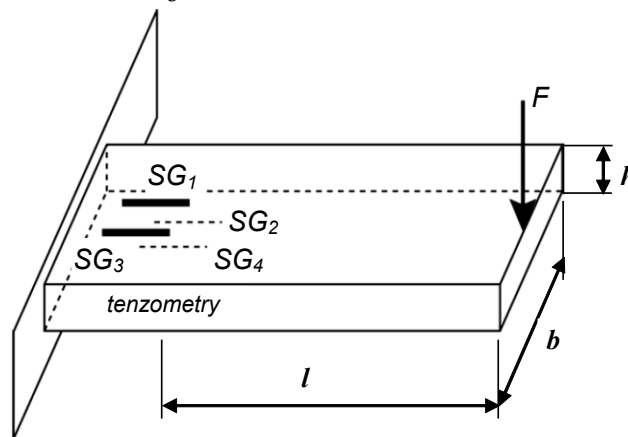
pro kruhový průřez:
$$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad (17)$$

pro mezikruží
$$W_0 = \frac{\pi \cdot (d_1^4 - d_2^4)}{32 \cdot d_1}, \quad (18)$$

kde d_1 je vnější průměr a d_2 je vnitřní průměr průřezu,

pro čtvercový průřez:
$$W_0 = \frac{a^3}{6}, \quad (19)$$

pro obdélníkový průřez:
$$W_0 = \frac{b \cdot h^2}{6}. \quad (20)$$



Obr.4: Schéma zapojení tenzometrů pro měření ohybu.

Výběr zapojení tenzometrů a výpočet hledaného napětí od ohybového momentu dle změřeného přetvoření tenzometru:

Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření	Měřené výstupní elektrické napětí	Napětí od ohybového momentu
čtvrtmůstek	SG ₁	$\varepsilon_V = \varepsilon_o$	$\Delta U_V = \frac{U_n}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_o$	$\sigma_o = \varepsilon_V \cdot E$
půlmůstek	SG ₁ , SG ₂	$\varepsilon_V = 2 \cdot \varepsilon_o$	$\Delta U_V = \frac{U_n}{2} \cdot k \cdot \varepsilon_o$	$\sigma_o = \frac{\varepsilon_V}{2} \cdot E$
plný most	SG ₁ , SG ₂ , SG ₃ , SG ₄	$\varepsilon_V = 4 \cdot \varepsilon_o$	$\Delta U_V = U_n \cdot k \cdot \varepsilon_o$	$\sigma_o = \frac{\varepsilon_V}{4} \cdot E$

Tab.2: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tenzometrů – ohyb, [9].

Hodnocení namáhání krouceného prutu

Natočení myšlené povrchové přímky mechanické části vlivem zatížení kroučícím momentem je označováno jako zkos (také tzv. úhel smyku či poměrné posunutí). Vztah mezi smykovým napětím vytvářeným kroučícím momentem a zkosem pro lineární elastické těleso je dán Hookeovým zákonem pro smyk. tj.:

$$\tau_k = G \cdot \gamma. \quad (21)$$

Veličina G je modul pružnosti ve smyku, který je dán vztahem:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (22)$$

kde E je opět Youngův modul pružnosti a μ je Poissonovo číslo. Velikost tangenciálního napětí od kroučícího momentu je určena vztahem:

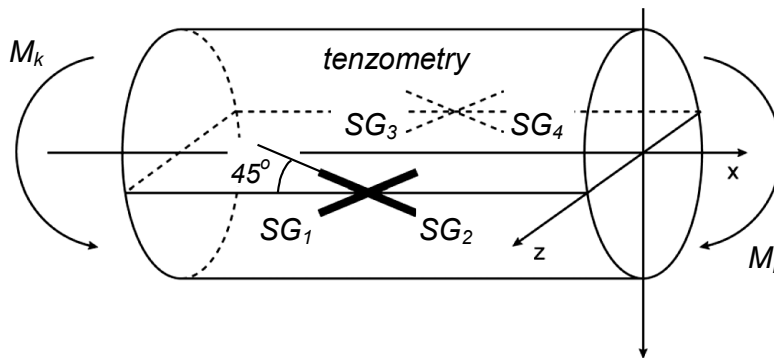
$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}, \quad (23)$$

kde M_k je kroučící moment a W_k je průřezový modul v krutu daný tvarem a rozměry testovaného profilu části konstrukce. Kroučící moment M_k je dán součinem velikosti výsledné působící síly a kolmou vzdáleností této síly k ose, vůči které působení kroučícího momentu uvažujeme. Modul průřezu W_k má hodnotu

pro kruhový průřez:
$$W_k = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (24)$$

Pro mezikružší pak
$$W_k = \frac{\pi \cdot (d_1^4 - d_2^4)}{16 \cdot d_1}, \quad (25)$$

kde d_1 je vnější průměr a d_2 je vnitřní průměr průřezu.



Obr.5: Schéma zapojení tenzometrů pro měření krutu.

Zapojení tenzometrů a výpočet hledaného napětí od kroučícího momentu dle změřeného přetvoření:

Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření (pod úhlem 45°)	Měřené výstupní elektrické napětí	Napětí od kroučícího momentu
plný most	SG ₁ , SG ₂ , SG ₃ , SG ₄	$\varepsilon_V = 4 \cdot \varepsilon_k = 2 \cdot \gamma$	$\Delta U_V = U_n \cdot k \cdot \varepsilon_k$	$\tau_k = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_V \cdot G$

Tab.3: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tenzometrů – krut, [9].

Hodnocení namáhání smykem namáhaného prutu

Pro smyk platí obdobné předpoklady jako pro krut, vztah mezi smykovým napětím vytvářeným tangenciální silou a zkosem je:

$$\tau_s = G \cdot \gamma. \quad (26)$$

Zapojení tenzometrů a výpočet hledaného napětí od tangenciální síly dle změřeného přetvoření:

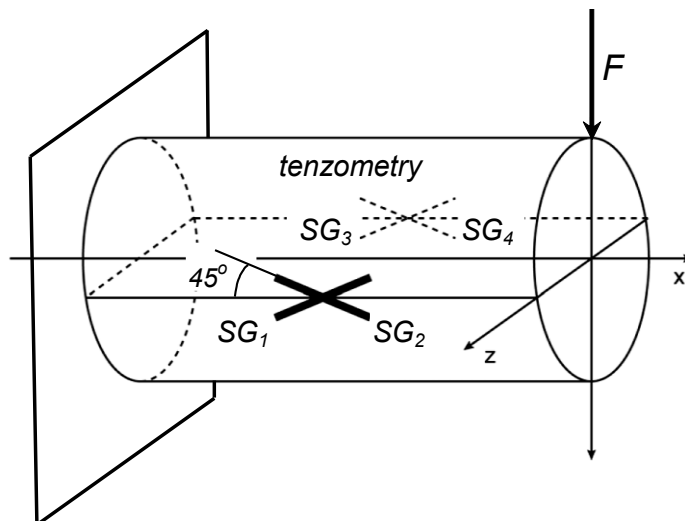
Aplikace	Pozice zapojených tenzometrů	Měřené celkové přetvoření (pod úhlem 45°)	Měřené výstupní elektrické napětí	Napětí od tangenciální síly
plný most	SG ₁ , SG ₂ , SG ₃ , SG ₄	$\varepsilon_V = 4 \cdot \varepsilon_s = 2 \cdot \gamma$	$\Delta U_V = U_n \cdot k \cdot \varepsilon_s$	$\tau_s = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_V \cdot G$

Tab.4: Výpočet namáhání dle způsobu zapojení tenzometrů – smyk, [9].

Vlastní výpočet napětí je složitější a je opět dán průřezovými charakteristikami definovanými např. tvarovým faktorem, který výpočet zjednodušuje:

$$\tau_s = \frac{F}{A} \cdot c_A, \quad (27)$$

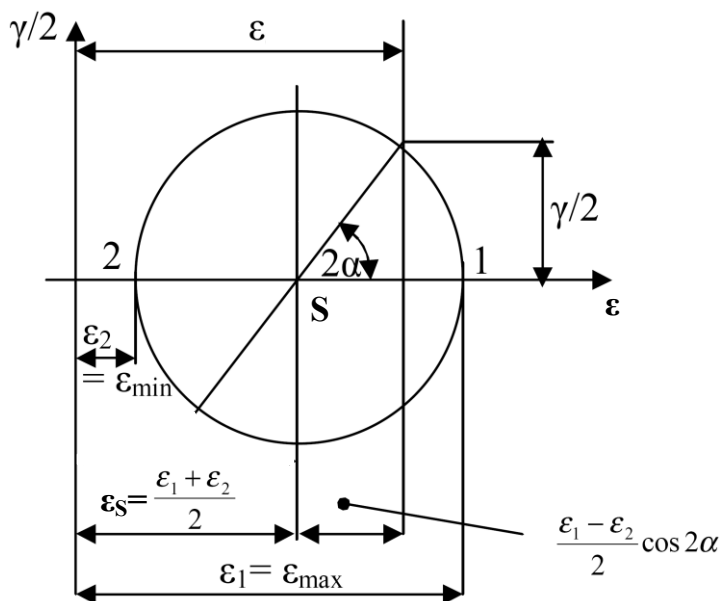
kde pro kruhový průřez $c_A=4/3$, mezikruží $c_A=2$, obdélníkový $b/h \leq 1/2$ je $c_A=3/2$.



Obr.6: Schéma zapojení tenzometrů pro měření smyku.

Řešení rovinné napjatosti a měření tenzometrickými růžicemi

Při studiu rovinné napjatosti s neznámými směry hlavních napětí se využívá Mohrovy kružnice, která nám umožňuje zachytit vztah mezi deformací ε a zkosem γ v určitém místě na povrchu. Na obr.7 je uvedena Mohrova kružnice pro studium deformace.

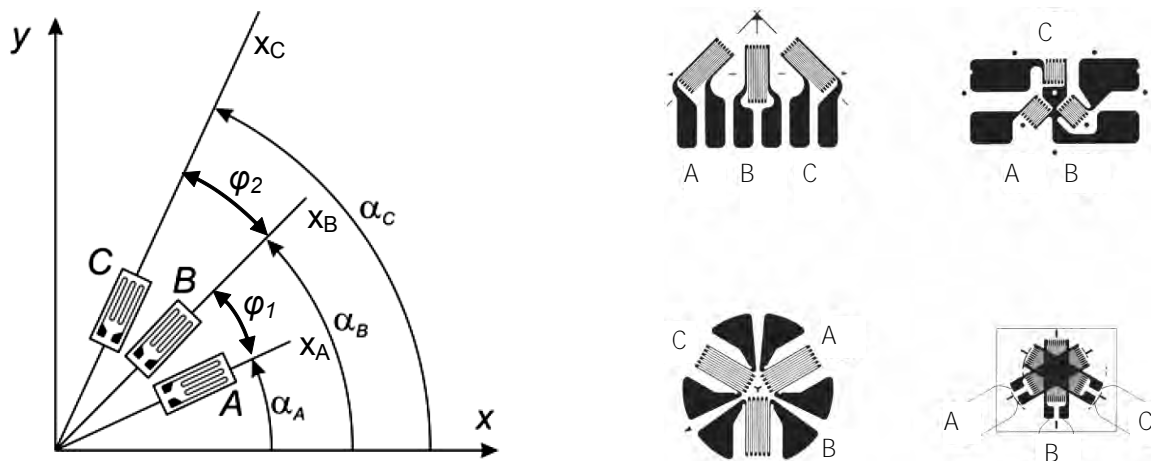


Obr.7: Mohrova kružnice pro studium deformace.

Deformace, tj. poměrné prodloužení ε , je odchýlena od maximální deformace o úhel α , tj. v Mohrově kružnici ve stejném smyslu o úhel 2α . Pro ε tedy, obr.7:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2\alpha). \quad (28)$$

Z rovnice vyplývá, že změříme-li libovolné poměrné prodloužení, představují poměrná prodloužení ε_1 , ε_2 a úhel α tři neznámé. Máme-li tedy být schopni vypočítat hlavní poměrná prodloužení, musíme provést měření ve třech směrech.



Obr.8: Typy tenzometrických růžic s třemi tenzometry, [9].

Dle obr.8 můžeme psát:

$$\alpha_B = \alpha_A + \varphi_1 \quad \alpha_C = \alpha_A + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (29)$$

Tedy při známých úhlech φ_1 a φ_2 je jediným neznámým úhlem úhel α_A . Potom můžeme pro směr x_A psát po úpravě výše uvedeného vztahu, [15]:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\alpha_A)) + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\alpha_A)) \quad (30)$$

a odtud:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha_A + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha_A. \quad (31)$$

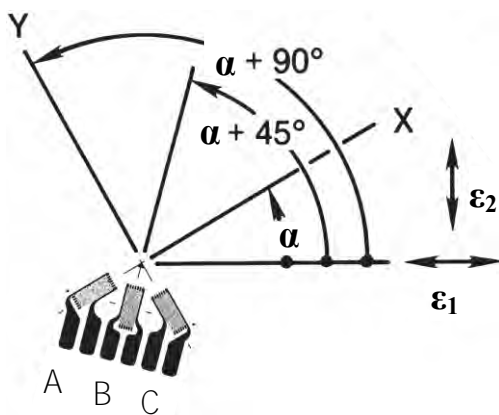
Pro zbývající směry obdobně:

$$\varepsilon_B = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha_B + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha_B, \quad (32)$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha_C + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha_C. \quad (33)$$

Z obecných rovnic lze na základě změřených hodnot poměrných prodloužení ε_A , ε_B a ε_C , s ohledem na tvar a počet uvedených rovnic, vypočítat hlavní poměrná prodloužení ε_1 , ε_2 při obecných směrech x_A , x_B a x_C tenzometrů, [9].

V praxi se pro měření používají tzv. tenzometrické růžice, které musí mít, podle uvedené teorie, vinutí (také tzv. tři tenzometry) orientováno minimálně do tří směrů. Úhly mezi těmito směry se volí tak, aby vyhodnocení bylo co nejjednodušší. Používané jsou dvě tenzometrické růžice $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ a $0^\circ/60^\circ/120^\circ$.



Obr.9: Tenzometrická růžice $0^\circ/45^\circ/90^\circ$, [9].

Uvažujme tenzometrickou růžici se vzájemnými osami tenzometrů svírající úhly 45^0 , Obr.9. Při výpočtu vycházíme z Mohrovy kružnice kde:

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \cdot \cos(2\alpha), \quad (34)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2(\alpha + 45^0), \quad (35)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2(\alpha + 90^0). \quad (36)$$

Z tří rovnic se známými hodnotami ε_A , ε_B , a ε_C odvodíme vztahy pro:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2}, \quad (37)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\varepsilon_A - 2 \cdot \varepsilon_B + \varepsilon_C}{\varepsilon_A - \varepsilon_C} \right) \quad \text{resp.} \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \varepsilon_B - (\varepsilon_A + \varepsilon_C)}{\varepsilon_A - \varepsilon_C} \right). \quad (38)$$

Známe-li modul pružnosti v tahu E a Poissonovo číslo μ měřeného materiálu, můžeme hlavní napětí odpovídající hlavním poměrným prodloužením určit z Hookeova zákona, včetně maximálního smykového napětí. Pokud pro rovinnou napjatost obecně platí:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu \cdot E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu \cdot E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

pak úpravou získáme vztahy:

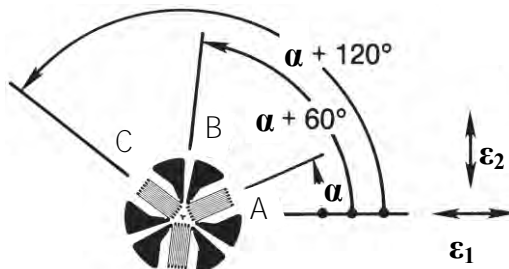
$$\sigma_{\max} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2) \quad \sigma_{\min} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_2 + \mu \cdot \varepsilon_1) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (40)$$

Dalším typem v praxi používané tenzometrické růžice je růžice se vzájemnými osami tenzometrů svírající úhly 60^0 , Obr.10. Při výpočtu opět vycházíme z Mohrovy kružnice a odtud tří rovnic pro deformace ve směrech $\alpha, \alpha + 60^0, \alpha + 120^0$. Výsledný vztah pro výpočet hlavního přetvoření je:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}, \quad (41)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot (\varepsilon_C - \varepsilon_B)}{2 \cdot \varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C} \right) \quad \text{resp.} \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot (\varepsilon_B - \varepsilon_C)}{2 \cdot \varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C} \right). \quad (42)$$

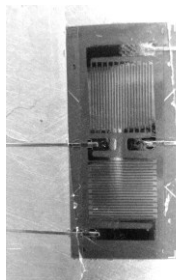
Odpovídající velikosti napětí bychom dále řešili stejným způsobem jako v případě $0^0/45^0/90^0$ růžice.



Obr.10: Tenzometrická růžice $0^0/60^0/120^0$, [9].

Způsob aplikace tenzometrů

Měření tenzometry je často využívanou metodou v biomechanice k experimentálnímu měření např. deformací částí kosterního systému a vývoji jeho umělých náhrad, tj. protetice. Dále se s tenzometrií můžeme setkat v dynamometrech měření sil a vážních čidlech např. ve fyzioterapii a sportovní biomechanice, či při návrhu dalších zdravotnických pomůcek, jakými jsou lůžka, chirurgické nástroje, atp.



Obr.11: Na konstrukci nalepený dvousý tenzometrický kříž (půlmůstek) před nanesením ochranného povlaku, který chrání tenzometry před vlhkostí a mechanickým poškozením.

V dynamometrech využíváme snímačů, které převádějí mechanickou deformaci na elektrickou veličinu (napětí). Jelikož příčinou mechanické deformace je působení určité mechanické síly (např. vyvolané hmotností), tak při použití správného převodu dokážeme z míry deformace určit velikost působící síly. Takovýto tenzometrický snímač se skládá ze dvou částí a to:

Mechanické - jedná se o kovové profily různých tvarů a provedení, které jsou v určitém místě narušeny (otvorem, nebo řezem). Narušením vytvoříme nejslabší místo snímače, které je nejvhodnější pro umístění tenzometrických známek.

Elektrické - jedná se o tenzometrické známky tvořící Wheatstoneův můstek, umístěné většinou uvnitř těla snímače. Tenzometrické známky jsou jednoosé nebo víceosé, které tvoří obvykle více tenzometrů, tedy půl či celý most. Víceosé známky jsou buď tenzometrické kříže pro měření, pokud známe hlavní směry napětí, nebo tenzometrické růžice, pokud neznáme směry hlavních napětí.



Obr.12: Využití tenzometrického snímače v dynamometru.

Tenzometry jsou charakterizovány odporem (obvykle 120 Ohmů či 350 Ohmů), k -faktorem, což je deformační součinitel, dále pak např. linearitou, příčnou citlivostí, atp. Tenzometry se musí aplikovat tak, aby byla zaručena přesnost měření. K tomuto se používá aplikačních sad obsahujících aplikační prostředky doporučené výrobcem tenzometrů. Kroky aplikace tenzometrické známky jsou tyto:

- mechanické očištění povrchu měřené části konstrukce (pískování, atp.),
- chemické očištění povrchu (acetone, atp.),
- nalepení tenzometru a letovací lišty (lepidly vytvrzovanými za běžné teploty či zvýšené teploty, jedno či dvousložkovými),
- krytí tenzometru krycími prostředky (silikonové tmely, pryskyřice, polyuretanový lak, hliníkové folie, atp.).

Po aplikaci známky/známek se tyto zapojují do tenzometrického mostu, který obvykle tvoří tzv. jeden kanál, přes který je tenzometrický most napájen konstantním napětím a je snímána, zesilována a zaznamenávána změna výstupního napětí z tenzometrického mostu. Pro vyhodnocení signálu a sběr dat slouží v praxi jednokanálové měřicí zesilovače, analogové vícekanálové měřicí ústředny a vysoce přesné digitální ústředny pro laboratorní měření a kalibrační účely.

4.2 Silové poměry v lůžku protézy a jeho konstrukce

Úkoly měření a výpočtu

1) Určete na modelu zatížené protézy maximální normálovou sílu přenášenou z pahýlového lůžka do nahrazující ztracené části těla (např. bérce) a určete minimální průřezové charakteristiky konstrukčních částí.

2) Určete na modelu zatížené exoprotézy rozložení síly v lůžku. K měření použijte vážní čidla a sestrojte graf rozložení síly/tlaku. Definujte místa největšího a nejmenšího zatížení.

Teoretický základ řešených úloh

Důležitým aspektem při návrhu protéz je studium silových poměrů v jejich konstrukčních částech. Protéza je tělesná náhrada, tj. umělé zařízení nahrazující chybějící část těla. Protézy se typicky používají pro nahrazení částí těla ztracených zraněním (traumaticky), chybějících od narození (vrozených), nebo se používají pro podporu chybných tělních součástí. Bylo vyvinuto mnoho typů protéz, uvnitř těla se často používají umělé chlopně, bandáže žaludku, stomatologické protézy, atd. Implantované tj. vnitřně použité náhrady, především kosterního systému (kloubů), se nazývají endoprotézy („totální“ nahrazují celou část; „částečné“ nahrazují jen poškozenou oblast). Náhrady externě aplikované, obvykle na amputační pahýl, se nazývají exoprotézy. Pro další popis konstrukce a návrhu exoprotéz předpokládejme exoprotézu dolní končetiny.

Protéza dolní končetiny je ortopedická pomůcka nahrazující chybějící část končetiny. Pacientovi umožňuje stabilitu a bipedální lokomoci. Protéza je vždy stavěna podle individuálních potřeb pacienta a spolu s ním tvoří funkční jednotku; tento stav označujeme jako „biomechanický celek“. Princip stavěbnice u končetinových protéz sestává z individuálně vyrobených částí (uložení pahýlu) a dalších sériově vyráběných komponent vybraných z katalogů podle požadavků

Po amputaci a v případě, když nedojde k celkovým nebo místním komplikacím, je prováděno „okamžité“ protézování. Provizorní protéza je pacientovi přidělena bezprostředně po operaci. Principem je přiložení sádrové fixace, do které je zabudován pylon s protézou nohy. Sádrové lůžko provizorní protézy pomáhá formovat amputační pahýl a brání vzniku edému. Dnes se od „okamžitého“ protézování ustupuje a častěji se využívá „časného“ protézování. Při dobré pooperační rehabilitaci se pacient vybavuje protézou po 6 týdnech od operace. Protéza „časného“ protézování se nazývá přechodná (prozatímní) a slouží pacientovi do té doby, než se pahýl vyformuje do definitivního tvaru a bude jej možno vybavit protézou definitivní, což je asi za 3 měsíce po operaci. Protéza přechodná má maximální funkční podobnost s definitivní protézou a její lůžko se musí dát co nejrychleji a nejjednodušeji přizpůsobit změnám amputačního pahýlu. Po přechodné protéze je pacientovi vybrána definitivní protéza. Základní typy definitivních protéz dolní končetiny jsou:

- Exartikulační kyčelní protézy, základem je výroba pánevního koše, který u těchto protéz nahrazuje pahýlové lůžko. Používají se speciální výkyvné kyčelní exartikulační klouby.
- Transfemorální protézy, u protéz má zásadní význam pro dobrou funkci správně vytvarované pahýlové lůžko. Způsob uchycení stehenní objímky k amputačnímu pahýlu je volen individuálně, pokud má pahýl vhodný a stálý tvar, je využito přísavného efektu měkkých tkání k lůžku protézy. Alternativou je uchycení pomocí závěsné bandáže nebo silikonového návleku. Lůžko se zhotovuje z měkkého vnitřního plastu a odlehčeného karbonového rámu. Pro stabilizaci a ochranu tkání pahýlu se používá silikonový návlek.
- Exartikulační kolenní protézy, používá se u nich speciální kloub, jehož osa pohybu je těsně pod kondylu femuru.
- Transtibiální protézy, jsou vyráběny jako modulární. Existuje několik typů lůžek, např. typ MSS lůžka vyráběného přímo na amputačním pahýlu uživatele. Dalším je typ KBM, u kterého jsou peloty vytaženy k oběma kondylům femuru, zatímco česka zůstává volná. Pro rovnoměrnou zátěž

pahýlu a neomezený rozsah pohybu v kolenním kloubu se zhotovuje např. lůžko typu TSB se silikonovým návlekem.

- Protézy po amputaci v noze a hleznu. Pro většinu amputací v noze se používají nízké silikonové protézy, které se vyznačují pohyblivostí v hleznu. Protézy se používají s běžnou nebo ortopedickou obuví.

Po volbě definitivní protézy se musí pacient naučit protézu používat a umět si ji nasadit, včetně vtažení amputačního pahýlu do lůžka a zafixování. Pacient se musí naučit plně zatížit protézu, to znamená zvládnout stoj na protéze se zdviženou zdravou končetinou. Protézy se nasazují pomocí trikotové hadice, která je po nasazení buď vytažena, nebo zůstává jako ochrana pahýlu.

Řešení konstrukce protézy

Každá protéza se skládá z níže uvedených částí, přičemž opět konkrétně předpokládáme exoprotézu dolní končetiny, [21]:

Pahýlové lůžko

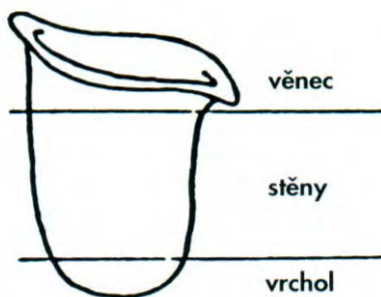
Je individuální, pokrývá povrch amputačního pahýlu a dělí se na 3 části:

- Horní zesílená část lůžka se nazývá věnec. Jsou zde vymodelovány opěrné plochy a body, do nichž se přenáší zátěž pacientova těla (u stehenní protézy je to sedací hrbol, u bérkové protézy jsou to mediální a laterální plochy kondylů tibie a krček hlavičky fibuly).

- Střední část pahýlového lůžka tvoří stěny. Jsou modelovány podle tvaru pahýlu a jednotlivých svalových skupin.

- Distální část pahýlového lůžka vytváří dno (vrchol).

Podle způsobu uchycení pahýlového lůžka na pahýlu, rozeznáváme pahýlová lůžka závěsná, semikontaktní a plně kontaktní [5].



Obr.1: Schéma pahýlového lůžka, [21].

Náhradní díly:

Nahrazují ztracenou část těla (stehno, bérce, noha), jsou tvořeny modulárními prvky.

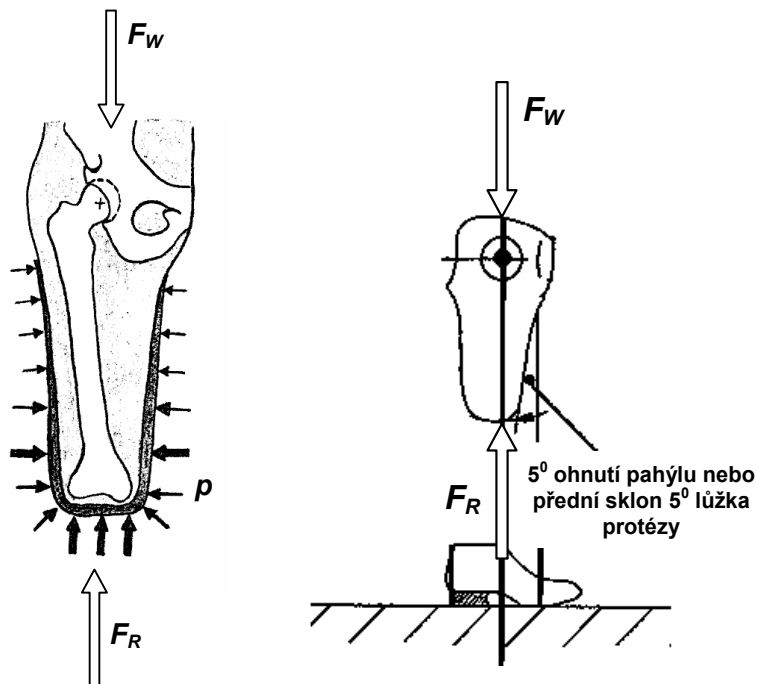
Pomocné díly:

Pomáhají udržovat protézu na pahýlu a zajišťují lepší stabilitu protézy.

Protézy jsou vyráběny jak z materiálů přírodních, tak syntetických. Z přírodních materiálů jsou nejběžnější kovy (slitiny hliníku, titan, ocel), zřídka se používá dřevo a kůže. Syntetické materiály jsou využívány standardně, patří mezi ně syntetické tkaniny, plasty (termosety, termoplasty, elastomery a vyztužené plasty). Výroba všech lůžek protézy se provádí individuálně odebráním sádrového odlitku. Pokud nemůže pacient během sádrového odlitku stát, ale předpokládá se brzké zlepšení fyzické kondice, provádí se měření pahýlu pro následné zpracování návrhu lůžka pomocí počítačového programu. Pro výrobu skeletu lůžek se používá skelné vlákno a polyesterový návlek prosycený metylakrylátovou pryskyřicí, pokud je třeba skelet lůžka maximálně odlehčit, je možné skelné vlákno nahradit uhlíkovou tkaninou. Vhodným materiálem jsou i termoplasty.

Novou metodou je technika osseointegrace, jejímž principem je upevnění protézy přímo ke kosti amputačního pahýlu. Systém implantátu se skládá z upínací části, která je chirurgicky vpravena do kosti. Přibližně za 6 měsíců se spojovací díl, který pronikne kůží, připevní k upínací části, tj. protéza má na svém proximálním konci speciální objímku se zámkem, kterou je mechanicky spojena s integrovaným spojovacím dílem v pahýlu. Takovéto protézy se nazývají endo-exo protézy

a jejich výhody spočívají v pevném a stabilním upevnění protézy ke kosti, zjednodušeném způsobu připojení i odpojení protézy a menším výskytu otlaků v pahýlu.



Obr.2: a) Lůžko protézy po exartikulaci v kolenním kloubu, velikost šipek naznačuje velikost působících sil resp. rozložení tlaku; b) Lůžko transtibiální protézy s doporučeným parametrem předního zešíkmení a osovým přenosem sil, [21].

Měření sil v lůžku protézy

V praxi se používají pro měření rozložení tlaků, např. v lůžku protézy, taktilní snímače. Taktilní snímače se podle fyzikálního principu dělí na zařízení s elastomery, s tenzometry, kapacitní, s piezoelektrickými materiály, s optickými vlákny.

Nejznámějším taktilním snímačem pro měření rozložení tlaku v lůžku protézy je systém F-Socket. Připomeňme, že podobných taktilních snímačů se používá také při měření a vyhodnocování tlaku pod chodidly např. pomocí tzv. tlakových desek.



Obr.3: Systém F-Socket, který umožňuje měřit distribuci tlaku v lůžku protézy, (převzato z propagačních materiálů firmy Tekscan).

K experimentálnímu měření a vývoji protéz se používá tenzometrických nebo piezoelektrických čidel pro měření deformací nebo namáhání konstrukce, jedná se např. o vážní čidla, Obr.4.



Obr.4: Tenzometrické snímače vážní (vpravo) a s oky (vlevo).

4.3 Myoelektrické protézy a jejich řízení

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Změřte EMG signál, vytvořte obálku EMG signálu.
- 2) Normalizujte obálku podle maximální hodnoty a pro dva směry rotace servomotoru přiřaďte dvě hladiny obálky.
- 3) Realizujte ovládacím software s proměnnou rychlostí otáčení servomotoru paže v souladu s obálkou EMG signálu.
- 4) Určete nutný počet stupňů volnosti kinematického řetězce myoelektrické robotické paže pro jednotlivé typy amputací horní končetiny, aby byla adekvátně nahrazena amputovaná část.
- 5) Realizujte ovládacím software otáčení odpovídajícího počtu aktuátorů robotické paže obálkami EMG signálů, a to v souladu s požadovaným počtem stupňů volnosti kinematického řetězce.
- 6) Porovnejte očekávanou polohu koncového bodu robotické paže s reálnou naměřenou polohou paže po vykonaném pohybu.

Teoretický základ řešených úloh

Perspektivními protézami jsou protézy řízené prostřednictvím měřeného povrchového EMG signálu (označovaného také jako Surface Electromyography - SEMG). Aby bylo možné řídit tyto tzv. myoelektrické protézy, musí být vhodně zpracováno a interpretováno elektrického chování svalu do podoby řídicího signálu aktuátorů protetické náhrady.

Metody zpracování EMG signálu

Centrální nervový systém může řídit stupeň kontrakce svalu (skupiny svalů) pomocí počtu vzrušených motorických jednotek (MJ) (tzv. prostorové odstupňování) nebo pomocí frekvence vzruchů (tzv. časové odstupňování). Při posuzování časového a prostorového odstupňování síly svalu studujeme elektrické projevy vybrané MJ nebo registrujeme projevy současně více MJ. Zajímavé výsledky byly získány sledováním počtu akčních potenciálů (AP) z mnoha MJ a integrací jejich EMG. Integrovaním EMG signálu (*IEMG*) byla zjištěna závislost mezi svalovou silou a EMG signálem. Integrace je ekvivalentní výpočtu plochy pod rektifikovanou křivkou EMG signálu, [3, 18]:

$$IEMG = \int_t^{t+T} |EMG(t)| dt \quad (1)$$

Pro studium amplitudy signálu a svalové únavy používáme odmocnění střední hodnoty druhé mocniny, tzv. *RMS*. Hodnota *RMS* se získá sumací vyhodnocením průměrné hodnoty druhé mocniny signálu v určitém časovém úseku a jeho následným odmocněním, [3, 18]:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} |EMG^2(t)| dt} \quad (2)$$

Závislost mezi EMG signálem a mechanickou odezvou od svalu, na kterém měříme EMG signál, můžeme studovat z měřené rychlosti otáčení v konkrétním kloubu, tj. změřením otáčení v kloubu v závislosti na čase a transformováním do frekvenčního spektra, například pomocí Fourierovy transformace, získáme „mechanogram“. K porovnání mechanogramu s EMG signálem využíváme obálku EMG signálu. Ta vznikne tak, že u unipolárního signálu EMG dolnopropustným filtrem omezíme kmitočtové pásmo EMG signálu, aby odpovídalo kmitočtovému pásmu mechanogramu. Porovnáním obálky EMG s mechanogramem zjistíme korelace, tj. obálka EMG dává přímo informace o pohybové aktivitě. Pokud není nalezena dostatečná korelace mezi mechanickou prací a průběhem EMG signálu, může to být způsobeno nevhodnou velikostí elektrod a jejich umístěním, (tj. rozdíly zjištěné při sledování časového a prostorového odstupňování síly kontrakce vznikají tím,

že mechanogram je získáván pro celý sval, zatímco frekvence AP v EMG záznamu je získávána pouze z jednoho okrsku svalu). Předpoklad korelace EMG signálu a síly svalu resp. mechanické práce svalu využíváme v myoelektrických protézách. Aby byl myoelektrický signál použitelný v řídicím systému protézy, je obvykle alespoň rektifikován a následně vyhlazen.

Metody využití EMG signálu v řízení aktuátorů protetické náhrady

Řízení motorů řídicím systémem protéz bývá nejčastěji realizováno na základě digitálního amplitudového kódování. A to buď podle absolutní úrovně nebo rychlosti změny myopotenciálů. V případě řízení podle absolutní úrovně bývá obvykle jedna funkce protézy přiřazena jedné řídicí skupině svalů, tento „Dual-site“ systém má oddělené elektrody pro párové aktivity protézy (flexe/extenze, supinace/pronace), pohyby jsou tak více fyziologické a ovládání je snadnější. Pokud je svalová aktivita větší než nadefinovaný práh EMG signálu, je provedena příslušná akce. Podle svalu, ze kterého jsou EMG signály snímány, je provedeno otevření či zavření terminální pomůcky. Pohyb je prováděn stále stejnou rychlostí a silou. Druhý tzv. „Single-site“ systém využívá jednu elektrodu k ovládání obou párových pohybů. Podle síly svalové kontrakce dojde k vykonání určitého pohybu (např. velká síla působí flexi, malá extenzi), tj. systém dokáže rozlišit signály vznikající při rychlé a při pomalé kontrakci svalů. Další typ řízení se vyskytuje u protéz, které mají více funkčních komponent. Jedna elektroda může ovlivňovat více funkcí (např. pohyb v lokti a úchop), čehož je např. dosaženo krátkou kontrakcí svalů. K novějším a kvalitativně vyspělejším patří princip proporcionální.

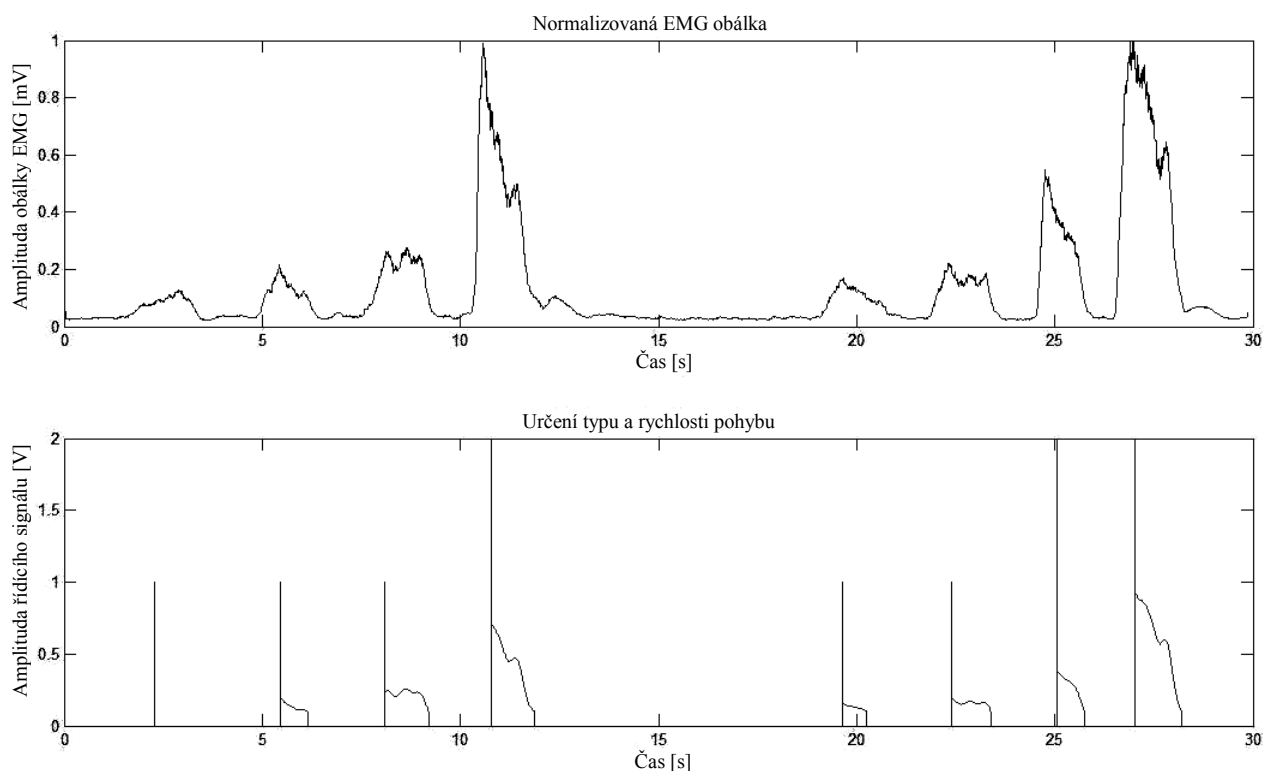
Proporcionální ovládání vychází z principu, že síla a rychlost svalové kontrakce se proporcionálně převádí na sílu a rychlost úchopu terminální pomůcky. V praxi to znamená, že pro spuštění motorku stačí jakákoli nadprahová úroveň EMG. Síla svalové kontrakce daná úrovní myosignálu tedy umožňuje kontrolovat rychlost a sílu úchopu. Řídicí jednotka okamžitě reaguje na jakékoliv změny signálu. To znamená, že pacient může pohybovat terminální pomůckou pomalu nebo rychle v jakékoliv pozici, čím je větší amplituda signálu, tím je daný pohyb proveden rychleji. Každý pohyb je řízen jednou svalovou skupinou, což znamená dvě řídicí svalové skupiny na řízení rychlostí a směrů otáčení v jedné ose otáčení kloubu, kde řídíme např. rychlosti flexe a extenze.

Dále je možné výše uvedené systémy kombinovat. Konkrétní funkce, tj. typ pohybu (flexe či extenze atp.), může být vybrána na základě rychlosti počátečního nárůstu aktivity svalu. Rychlost provedení vybrané funkce je následně řízena amplitudou signálu. Můžeme také maximální rozpětí amplitudy signálu rozdělit na řadu hladin s přiřazením funkcí protézy jednotlivým hladinám. Teoreticky lze rozpětí amplitudy signálu rozdělit na mnoho hladin, nicméně pokud chceme dosáhnout přijatelné přesnosti, nelze přiřadit jedné skupině svalů více než dvě funkce (např. zavření a otevření ruky).

Dle výše uvedeného bude podrobněji popsán model kombinovaného řízení obálkou EMG signálu. Obálka necht' je normalizovaná podle maximální hodnoty. Řízení bude realizováno proporcionálně, úhlová rychlost v kloubu je poměrná k amplitudě obálky. Dvě různé funkce jsou přiřazeny dvěma hladinám obálky. Na základě počáteční rychlosti nárůstu EMG signálu je vybrána příslušná funkce, tj. 1. nebo 2., následně je úhlová rychlost provedení dané funkce řízena podle amplitudy obálky. Popis algoritmu je:

- Je nastaven primární práh, který určuje, že uživatel zamýšlí provést nějakou akci. Tento práh je nastaven patřičně malý, aby byla prodleva mezi zahájením svalové činnosti a zahájením řízení protézy co nejmenší.
- Jestliže EMG signál překročí tuto hranici, algoritmus začne vyhodnocovat, kterou funkci chce uživatel provést. Toto je realizováno na základě rychlosti nárůstu signálu. Je nastavena časová konstanta, po které dojde k vyhodnocení a určení funkce.
- Jestliže po uplynutí doby určené časovou konstantou bude aktivita větší než práh č. 1., bude provedena akce přiřazená k tomuto prahu. Pro práh č. 1. lze přiřadit např. flexi.
- Jestliže po uplynutí doby určené časovou konstantou bude aktivita větší než práh č. 2., bude provedena akce přiřazená k tomuto prahu. Pro práh č. 2. lze přiřadit např. extenzi.

- Jakmile je vybrán typ pohybu, který je přiřazen funkci, kterou má paže provést, je rychlost provedení této funkce, tj. pohybu, řízena na základě aktuální aktivity EMG signálu.
- Pokud v kterémkoli okamžiku aktivita svalu (úroveň EMG signálu) poklesne pod terminální práh, je celý proces ukončen a paže nekoná žádná pohyb. Automaticky začíná hledání další indikace, že uživatel chce zahájit určitou činnost. Systém resp. algoritmus je automatický a kontinuální.



Obr. 1: Obálka EMG signálu a výběr typu pohybu a rychlosti pohybu, který aktuátor protetické paže provádí (např. 1. Hladina – flexe; 2. hladina – extenze).

Konstrukce myoelektrických protetických náhrad

Myoelektrická protéza je složitá protéza obsahující obvykle několik motorů, které umožňují silnější a přesnější úchop, který by nebyl dosažitelný pomocí klasické kladkové protézy. Ovládání je zajištěno myoelektrickým signálem, který je napojen na motory, které pohybují rukou, zápěstím, popřípadě loktem. Uživatel ovládá protézu myoelektrickými potenciály, snímanými nejčastěji na kůži nad kontrahující se zachovanou původní svalovou skupinou amputačního pahýlu. Povrchové kožní sondy jsou trvale umístěny v pahýlovém lůžku umělohmotného skeletu v nejvhodnějším místě pro měření svalových potenciálů. Při aplikaci myoelektrické protézy se musí dbát na snížení vlivu okolních elektrických signálů. Rušivé vlivy mohou být eliminovány správným uložením elektrod a vytvořením elektrického okruhu, který měřený signál vhodně filtruje. Elektrody obsahují předzesilovače pro zesílení slabého EMG signálu. Počet elektrod resp. kanálů závisí na schopnostech uživatele, obvykle jsou dvě či tři. Zesílený signál je převáděn k servomechanismu ovládajícímu protézu.

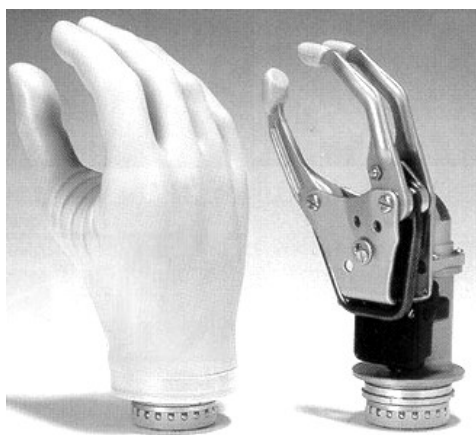
Hlavní funkcí v současnosti používaných myoelektrických protéz je úchop, který je realizován mechanismem elektrické ruky. U klasické myoelektrické protézy ruky pracují tři prsty. Palec, 2. a 3. prst. Palec se pohybuje proti zbylým dvěma. Zbylé prsty, 4. a 5., se pohybují jako blok. Protéza umožňuje pohyb prstů jen v jedné rovině a v rozsahu omezeném krajními polohami aktuátoru. Dále se myoelektrickou protézou zabezpečuje rotace v zápěstí, či alternativně ovládání motorického

lokte. Některé typy pažních amputací dovolují použití myoelektricky řízeného loketního kloubu. Nejnovější systémy umožňují i složité kombinované pohyby.

Při konstrukci protézy se řeší dva základní problémy návrhu: návrh mechanické části a návrh systému řízení pohybů. Myoelektrická protéza se skládá ze čtyř základních částí: pahýlového lůžka, vymezené části, terminální pomůcky a závěsného a ovládacího zařízení. Konstrukční části myoelektrické protézy jsou tyto:

- a) Pahýlové lůžko – spojuje amputační pahýl s konstrukcí protézy a umožňuje přesné a plynulé navázání protézy na tělo pacienta. Lůžko tvoří u těchto protéz speciální objímka zabezpečující přilnutí elektrod k pokožce pahýlu. Jestliže se elektrody uvolní, nemůže být protéza řádně ovládána. Z toho důvodu se vyrábějí diagnostické protézy s průhlednou plastovou objímkou, která umožňuje sledovat elektrody v průběhu užívání protézy. Objímka by měla být sestrojena tak, aby při jakémkoli pohybu, rychlosti, poloze a zátěži udržovala kontakt s kůží.
- b) Vymezená část – část nahrazující končetinový defekt. Představuje tvarové a funkční doplnění chybějící části končetiny mimo jejího ukončení, které představují terminální pomůcky. U elektricky ovládaných protéz bývá v této části umístěn dobíjecí akumulátor a další elektrická zařízení. Skelet je nejčastěji z duralu a vyměňuje se po dvou letech.
- c) Terminální pomůcky – funkční efektor protézy. Zakončuje protézu a přímo realizuje úchop.
- d) Ovládací zařízení – řídicí jednotka sloužící k ovládní hybné jednotky. Princip, konstrukce a funkce řídicích jednotek se u jednotlivých typů protéz liší z důvodu použití různých algoritmů řízení, různých typů aktuátorů, atd. Řídicí jednotka zpracovává měřený EMG signál a převádí jej na řídicí signál ovládající motory.
- e) Závěsné zařízení – upevňuje protézu a brání sklouznutí nebo posunu z funkčního postavení.
- f) Kryt pomůcky – kosmetická rukavice, atp. mající estetický efekt.

Myoelektrické protézy se sestavují ze sériově vyráběných stavebnicových dílů a kombinují se s individuální stavbou pahýlového lůžka.



Obr.2: Myoelektrická protéza firmy Otto Bock, terminální část (vpravo) a s kosmetickou rukavicí (vlevo), (převzato z propagačních materiálů firmy Otto Bock).

Kinematický řetězec končetiny

Myoelektrická protéza je mechatronický robotický systém. Můžeme tedy říci, že se v případě nejperspektivnějších paží jedná o robotickou paži resp. manipulátor, který dovoluje díky komplexní řídicí jednotce a soustavě aktuátorů vykonávat přesně takové pohyby, které by vykonávala lidská paže. Obecně jsou základem konstrukcí takovýchto systémů mechanismy, které slouží k transformaci pohybů a přenosu sil. Mechanismy jsou tvořeny z kinematických dvojic. Kinematická dvojice je dvojice těles tj. segmentů spojených vazbou. Vazba je omezení vzájemného pohybu dvou těles. Soustava kinematických dvojic tvoří tzv. kinematický řetězec, který tvoří mechanismus. Mechanismy se upevňují na nepohyblivý člen, kterému se říká rám. Rámem u myoelektrické protézy může být pahýlové lůžko spojující amputační pahýl s konstrukcí protézy. Každý mechanismus má svůj operační prostor, kam zasahuje nějakou svou částí při manipulaci. Důležitější

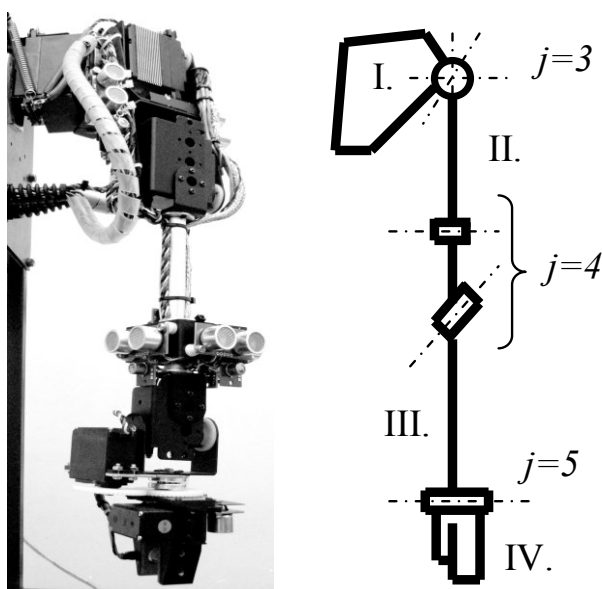
pro řízení mechanismu je jeho pracovní prostor, což je množina všech bodů, kam je možné nastavit koncový bod mechanismu (např. prsty ruky, dlaň, atp.).

Oba segmenty mohou v rámci kinematické dvojice vykonávat vzájemné pohyby, které jsou dány typem vzájemné vazby. Vzájemný pohyb segmentů je charakterizován počtem stupňů volnosti (Degrees of freedom - DoF). V mechanice se za stupně volnosti označují základní směry posunu a směry otáčení, kterými se mohou vzájemně segmenty v rámci kinematické dvojice pohybovat a otáčet.

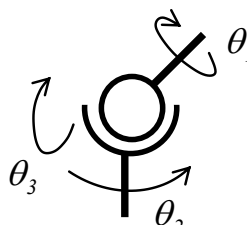
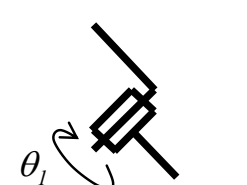
Možnosti manipulace paže v rámci pracovního prostoru jsou dány počtem stupňů volnosti kinematického řetězce:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - \sum_{j=1}^6 (j \cdot d_j), \quad (3)$$

kde n je počet segmentů kinematického řetězce včetně rámu resp. amputačního pahýlu v případě horní končetiny. Označení j charakterizuje třídu kinematické dvojice tj. typ vazby mezi dvěma segmenty a d_j je počet kinematických dvojic dané třídy. Třída kinematické dvojice je charakterizována číslem shodným s počtem stupňů volnosti, které jsou ve vazbě odnímány.



Obr.3: Myoelektrická robotická paže a schéma hlavních kinematických dvojic horní končetiny.

Symbol vazby	Počet DoF má / DoF odnímá
	sférická vazba třída 3 3 rotace / 3 posuvy
	rotační vazba třída 5 1 rotace / 5 (2 rotace, 3 posuvy)

Obr.4: Nejdůležitější typy vazeb horní končetiny.

Za zjednodušujících předpokladů zanedbání některých pohybů s malým rozsahem můžeme říci, že loketní kloub bude patřit do třídy 4, pokud budeme uvažovat v tomto kloubu i pronaci předloktí, ramenní kloub patří do třídy 3 a zápěstí do třídy 5. Za předpokladu návrhu umělé paže s totožným počtem segmentů a typů vazeb bude vytvořen mechanismus, jehož koncový bod se dokáže pohybovat shodně s předpokládaným koncovým bodem amputované horní končetiny (tj. prsty ruky).

Existuje řada přístupů technické realizace až šesti pohybů (3 translační a 3 rotační v 3D prostoru) koncového bodu odpovídajících reálným pohybům horní končetiny člověka, které jsou dány počtem stupňů volnosti. Běžně se používají k řízení metody přímé či inverzní kinematiky.

Necht' je paže na jednom konci pevně spojena s tělem (tudíž nelze samostatně měnit její polohu v prostoru) a pouze jeden konec kinematického řetězce je volný a budeme ho považovat za koncový bod. Koncový bod je v prostoru určen svými souřadnicemi tj. vektorem polohy \vec{p} (v typickém 3D případě bude mít tento vektor 3 nebo 6 složek, podle toho, chceme-li určovat pouze souřadnice koncového bodu nebo i jeho orientaci):

$$\vec{p} = [p_x; p_y; p_z]^T \quad (4)$$

Je zřejmé, že stavový vektor parametrů hierarchie $\vec{\theta}$ popisující v našem případě úhly rotací v kinematických dvojicích, tj. kloubech, a zapsaný ve tvaru

$$\vec{\theta} = [\theta_1; \theta_2; \dots; \theta_n]^T, \quad (5)$$

kde n je počet stupňů volnosti, nám umožňuje určit hodnoty souřadnic koncového bodu manipulátoru v kartézském prostoru. V přímé kinematice postupně určujeme natočení jednotlivých kloubů směrem od počátku (tzn. v případě ruky např. od ramene) a tím nakonec určíme polohu koncového bodu. Matematicky lze tedy princip přímé kinematiky vyjádřit takto:

$$\vec{p} = f(\vec{\theta}). \quad (6)$$

Tento vzorec nám tedy říká, že poloha koncového bodu \vec{p} je rovna funkci f , jejíž parametr je stavový vektor $\vec{\theta}$. Jinak řečeno, je to zobrazení prvku $\vec{\theta}$ na prvek \vec{p} , přičemž definiční obor je roven stavovému prostoru soustavy a obor hodnot jsou všechny možné pozice, na kterých se může koncový bod \vec{p} nacházet. Tento přístup je implementačně velmi jednoduchý, ale z uživatelského hlediska je to velmi nepohodlné řízení paže. Z tohoto důvodu se v praxi používá řízení maximálně tří nezávislých pohybů třemi řídicími signály. Polohu koncového bodu, například dvoukloubové paže (obr.5) s klouby umožňujícími pouze rotaci kolem jedné osy každého kloubu, je možné určit pomocí goniometrie:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \sin(\theta_1) + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \cos(\theta_1) + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

kde l_1 a l_2 jsou délky segmentů a θ_1 a θ_2 jsou úhly natočení kloubů.

Pro člověka je přirozenější představit si pohyb a plánovat jej v kartézských souřadnicích. Vhodnější je tedy použít obrácenou úlohu tj. ze znalosti předpokládané pozice \vec{p} umět určit vektor $\vec{\theta}$. A právě to je principem inverzní kinematiky.

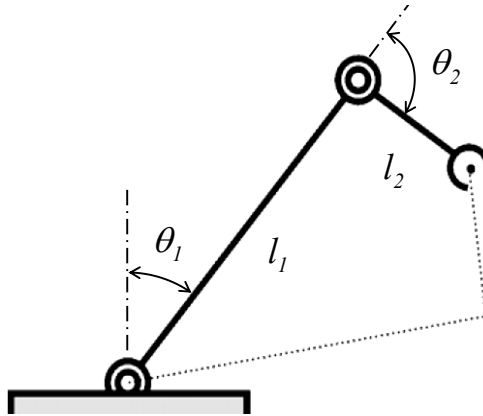
Matematicky lze úlohu inverzní kinematiky zapsat následovně:

$$\vec{\theta} = f^{-1}(\vec{p}). \quad (7)$$

Takovéto úlohy jsou však mnohem složitější a mohou mít více řešení, obr.5. Mohou mít dokonce nekonečně mnoho řešení. Největší problém však představuje samotná funkce f . Je totiž funkcí nelineární, která se s přibývajícimi klouby stává více a více komplexní. Pro složitější model je inverze této funkce analyticky neřešitelná. Možné a hojně uváděné řešení je linearizace daného problému s využitím inverze jakobiánu. K nalezení jakobiánu se používá například Newtonova iterační metoda, v níž je vstupem žádaná poloha koncového bodu řetězce a jejím výstupem je

odpovídající stavový vektor. Jakobián závislý na konkrétním stavovém vektoru $J(\vec{\theta})$ lze definovat takto:

$$J(\vec{\theta}) = \frac{d\vec{p}}{d\vec{\theta}}. \quad (8)$$



Obr.5: Dvoukloubová paže s možnými nejednoznačnými řešeními úlohy inverzní kinematiky.

To znamená, že pomocí posunu o malou vzdálenost $d\vec{p}$ spočítáme malou změnu stavového vektoru $d\vec{\theta}$. Výše zmíněný vzorec inverzní kinematiky lze linearizovat pomocí inverze jakobiánu a nalezení lokálního řešení při malém pohybu je:

$$d\vec{\theta} = J^{-1}(\vec{\theta})(d\vec{p}). \quad (9)$$

Pro tento vzorec je tedy známo řešení a teoreticky se stačí po malých částech blížit iterativně od počáteční polohy koncového bodu do polohy požadované. Algoritmus uvedeného řešení zapsaný v pseudokódu by vypadal následovně:

```

while ( $\vec{p}$  aktuální  $\neq$   $\vec{p}$  požadované)
{
     $d\vec{p}$  = malý_přírůstek_ve_směru_ $\vec{p}$ _požadované_polohy
     $d\vec{\theta} = J^{-1}(\vec{\theta})(d\vec{p})$ 
     $\vec{p} = f(\vec{\theta} + d\vec{\theta})$ 
     $J(\vec{\theta}) = \frac{d\vec{p}}{d\vec{\theta}}$ 
    invertuj  $J$ 
     $\vec{p} = \vec{p} + d\vec{p}$ 
}

```

Získaný a ověřený jakobián se implementuje do řídicích struktur a za tímto účelem byla vytvořena řada řídicích algoritmů ovládání robotických paží. Také zde se však vyskytuje několik problémů. První z nich je, že jakobián je obecně dimenze $m \times n$, kde m je dimenze \vec{p} a n je dimenze $\vec{\theta}$. V praxi to tedy znamená, že může neexistovat inverze jakobiánu a tu případně musíme simulovat pomocí metody tzv. pseudoinverze matice. To však vede k nepřesnosti při iterativním připočítávání $d\vec{p}$ a je třeba kontrolovat, abychom dosáhli požadovaného \vec{p} . Jakobián, například jednoduché dvoukloubové paže (obr.5), je možné určit takto:

$$J(\vec{\theta}) = \frac{d\vec{p}}{d\vec{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{dp_x}{d\theta_1} & \frac{dp_x}{d\theta_2} \\ \frac{dp_y}{d\theta_1} & \frac{dp_y}{d\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos(\theta_1) + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \cdot \sin(\theta_1) - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}.$$

Ve výjimečných případech jednoduchých úloh můžeme určit $\vec{\theta}$ podle žádané \vec{p} přímo pomocí goniometrie. Například pro dvoukloubovou paži (obr.5) je možné určit úhly rotací ve dvou kloubech vztahy:

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2} \right),$$

$$\theta_2 = \frac{-p_y \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_2) + p_x \cdot (l_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_2))}{p_x \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_2) + p_y \cdot (l_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_2))}.$$

Při přesném polohování protetické paže musíme brát v úvahu vliv celé řady faktorů (způsob řízení, uspořádání kinematického řetězce, tuhost konstrukce, atp.). Každá kinematická dvojice má během řízení pohybu určitou odchylku mezi požadovanou pozicí a skutečnou pozicí. Celková chyba v jedné kinematické dvojici Δ_i zahrnuje všechny výrobní a provozní vûle. Pak je výsledná chyba polohování Δ_c dána geometrickým součtem chyb všech kinematických dvojic v řetězci, tj. obecně platí

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^m \Delta_i, \quad (10)$$

kde m je počet kinematických dvojic řetězce. V případě pravoúhlého 3D souřadného systému, s výslednými chybami v jednotlivých směrech $\Delta_{cx}, \Delta_{cy}, \Delta_{cz}$, by pak výsledná chyba byla určena vztahem:

$$\Delta_c = \sqrt{\Delta_{cx}^2 + \Delta_{cy}^2 + \Delta_{cz}^2}. \quad (11)$$

Jak je z výše uvedeného zřejmé, v praxi se může při řízení mechanismů se složitými kinematickými řetězci vyskytnout řada problémů. Z tohoto důvodu se myoelektrické protézy konstruují do maximálního počtu tří stupňů volnosti koncového bodu. Další problém aplikace složitých mechanismů je na straně uživatele, neboť pacienti po amputaci horní končetiny mají omezené schopnosti naučit se ovládat větší počet pohybů pomocí EMG signálu nezávislých svalů. Z tohoto důvodu se v současnosti používají maximálně tři aktuátory realizující tři rotační pohyby kinematických dvojic, obvykle se však používá pouze jeden, po amputaci v zápěstí/předloktí. Druhý aktuátor ovládá kleštiny považované za koncový bod paže a je obvykle řízen nezávisle na řízení kinematického řetězce pomocí úloh přímé či inverzní kinematiky.

Budoucnost myoelektrické protetiky závisí na výzkumu myoelektrického signálu, způsobu jeho snímání a zpracování, aby bylo možné zajistit vyšší variabilitu a počet současně prováděných pohybů. K rozšíření může také přispět aplikace nových řídicích algoritmů, perspektivní jsou především metody inverzí kinematiky, kde se neřídí EMG signálem přímo aktuátory, ale pouze poloha koncového bodu paže. Budoucí vývoj také směřuje k přímému napojení systémů protéz na nervová zakončení poškozené končetiny. Experimentálně se jako aktuátory testují tlakové, či podtlakové umělé svaly, hydraulické a pneumatické motorky, materiály s tvarovou pamětí a materiály s různou dilatací.

V. Vybrané okruhy z biomechaniky materiálových vlastností

5.1 Základní mechanické vlastnosti povrchů

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete tvrdost povrchu materiálu protetické náhrady vnikací zkouškou.
- 2) Vypočtete z výsledku měření vrypové zkoušky hodnotu adheze povrchové vrstvy k substrátu.
- 3) Určete drsnost povrchu endoprotézy.

Teoretický základ řešených úloh

V biomechanice se často setkáme s potřebou hodnocení mechanických vlastností povrchů, např. protetických náhrad. Měření povrchových vlastností mechanických dílů se provádí ručními či motorizovanými přístroji. V praxi se používají jednoduché stojanové nebo přenosné tvrdoměry, drsnoměry, atd. Ve výzkumu a vývoji se používají velmi přesná zařízení s mikroskopem, která jsou schopna měřit současně tvrdost i adhezi, a vyhodnocovat také drsnost povrchu.

Tvrdost a mikrotvrdost

Tvrdost je definována jako odpor materiálu proti pronikání cizího tělesa. Obvykle je tvrdost materiálu měřena statickými vnikacími zkouškami makrotvrdosti, kde využíváme různých tvarů vnikajících tělísek. Podle typu tělísek je tvrdost označována *HB* (tvrdost dle Brinella), *HR* (tvrdost dle Rockwella), *HV* (tvrdost dle Vickerse), apod. Měření probíhá tak, že se po určitou dobu zvyšuje zátěž na zkušební tělísko vtlačované do materiálu až do maximální hodnoty, pak následuje odlehčení a odečet hodnoty, která koresponduje s hloubkou respektive s velikostí vtisku či stopy. Z těchto údajů se zjišťuje výsledná tvrdost. V současné době jsou u nás normovány a nejvíce používány následující zkoušky tvrdosti:

- Zkouška tvrdosti podle Brinella je založena na vtlačování indentoru do zkoušeného materiálu. Indentor má tvar kuličky. Metoda je vhodná pro měkké a středně tvrdé materiály. Výsledná tvrdost se vypočte z rozměru vtisku a zátěžné síly.
- Zkouška tvrdosti podle Rockwella využívá indentoru v podobě kalené kuličky (*HRB*) nebo diamantového kužele (*HRA, HRC*). Metoda umožňuje měřit materiály měkké i velmi tvrdé.
- Zkouška tvrdosti podle Vickerse využívá indentoru, který má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu. Metoda je velmi přesná a lze ji použít pro měkké i velmi tvrdé materiály, používá se pro měření mikrotvrdosti i makrotvrdosti.
- Zkouška tvrdosti podle Knoop (*HK*) využívá zkušební tělísko ve tvaru diamantového jehlanu, jehož základnou však není čtverec, ale velmi protáhlý kosočtverec. Zkouška se využívá pro určování mikrotvrdosti materiálu.

Méně častěji se používají dynamické zkoušky makrotvrdosti. Dle druhu vzniklé deformace ve zkoušeném materiálu můžeme tyto zkoušky dělit na zkoušky dynamicko–plastické, tj. indentor vniká do zkoušeného předmětu rázem a způsobí na povrchu trvalou deformaci. Jako indentor je nejčastěji užívána kulička. Výhodou je malá hmotnost a přenosnost těchto měřících zařízení. Druhá metoda dynamicko–elastická využívá principu dopadu indentoru rázem, který je důsledkem tíhové síly. Indentor je odražen zpět k výchozí pozici, ale nemá dostatek energie k jejímu dosažení. Vzdálenost odskoku indentoru je pak míra tvrdosti zkoušeného materiálu.

Mikrotvrdost je určována zejména pro tenké vrstvy, definice je stejná jako u „klasické“ tvrdosti, ale rozdíl spočívá ve volbě velikosti maximální zátěže. V tomto případě je maximální zátěž v řádu desítek mN. Důvod použití tak nízkých sil spočívá v nutnosti měření tvrdosti samotné vrstvy bez vlivu materiálu, na kterém je vrstva nanášena. Přístroje umožňují měření tvrdosti v průběhu zatěžování i během odtěžování. Výsledkem měření je pak nejen výsledná hodnota tvrdosti

materiálu, ale i tvar zatěžovací a odtěžovací křivky. Na ní je možné rozpoznat nejen nehomogenity, vměstky v různých hloubkách, apod., ale především podíl elastické a plastické deformace.

Zkoušky makrotvrlosti	statické	vrypové	metoda Martens
		vnikací	metoda Brinell
			metoda Vickers
			metoda Rockwell
	dynamické	plastické nárazové	metoda volným pádem
			metoda stlačenou pružinou
			porovnávací metoda
elastické odrazové	metoda volným pádem		
	metoda kyvadlová		
Zkoušky mikrotvrlosti	statické	vnikací	metoda Vickers
			metoda Knoop
Zkoušky nanotvrlosti	statické	vnikací	metoda Berkovich

Tab.1: Typy zkoušek tvrdosti povrchu.

Pokud bychom dále snížili velikost sil, používaných při měření, dostaneme se do oblasti tzv. nanotvrlosti. Velikost sil při těchto zkouškách může být až 1nN a hloubka vtisku 0,1nm. Záznam z měření průběhu velikosti zatížení a hloubky vtisku lze využít ke studiu dalších vlastností materiálu jako modul pružnosti v tahu nebo lomová houževnatost. Indentory jsou vyráběny především z diamantu. Nejčastěji se využívá trojboký jehlan dle Berkoviche. Berkovichův jehlan zachovává stejný poměr hloubky a plochy vtisku, lze u něj také vybrousit špičku hrotu do bodu. Tím je zaručena geometrická podobnost vtisků. Kromě jehlanu lze ke zkoušení nanotvrlosti využít také kuličku, případně i jiné tvary indenterů. Použití kuličky je vhodné z důvodu možnosti studia nárůstu nejprve elastických a následně plastických deformací. Zkouška umožňuje vyhodnotit mez kluzu a zpevňování vzorku. Jako další typ indenteru lze použít hrot, který má tvar rohu krychle. Takovýto hrot vyvolá ve zkoušeném materiálu větší napětí, a protože je ostřejší, vyvolá u křehčích materiálů mikrotrhliny. Mikrotrhliny lze využít při hodnocení lomové houževnatosti. Princip zkoušení nanotvrlosti je obdobný jako u klasických statických vnikacích zkoušek.

Tvrdot materiálu H je u všech statických vnikacích zkoušek definována jako odpor, který materiál klade proti vnikajícímu tělísku, tedy indenteru. Obecně lze tedy tvrdost při určité teplotě popsat následujícím vztahem:

$$H = \frac{F_{\max}}{A} \quad (1)$$

kde v čitateli je uvedena maximální hodnota zátěžové síly a ve jmenovateli plocha otisku indenteru.

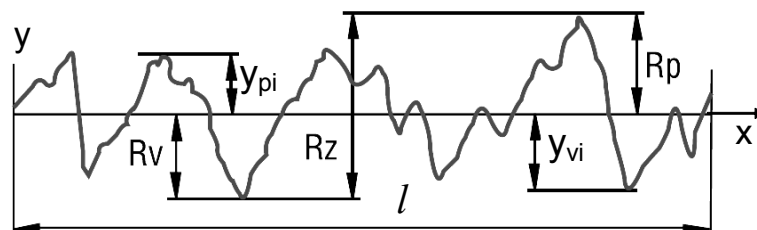
Drsnost povrchu

Je souhrn nerovností povrchu s relativně malou vzdáleností, které vznikají při výrobě nebo jiným vlivem. V případě nanášení vrstev na substrát je drsnost způsobená jak vlastním opracováním substrátu, tak i způsobem nanášení materiálu tenké vrstvy. Při měření drsnosti se nepočítají vady povrchu, tj. náhodné nepravidelné nerovnosti, které se vyskytují jen ojediněle a které vznikají vadami materiálu, poškozením, atp. Z důvodu eliminace vlivu předchozího opracování substrátu, s cílem možnosti porovnávání různých typů vrstev, se provádí měření drsnosti nanášených povrchových vrstev na speciálně leštěných vzorcích. Výchozí drsnost R_a vzorku substrátu je 0,01-0,02 μm . Měřená výsledná drsnost povrchu pak není ovlivněna opracováním původního substrátu, ale jen nanášenou vrstvou.

Na Obr.1 je ukázán profil povrchu, kde R_z je maximální výška nerovnosti povrchy daná součtem výšky nejvyššího výstupku R_p a hloubky nejnižší rýhy R_v uvnitř základní měřené délky l .

Nejdůležitější hodnotou, kterou je drsnost standardně charakterizována, je však střední aritmetická odchylka, která je definována:

$$Ra = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l |y(x)| dx \doteq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y(x)|. \quad (2)$$



Obr.1: Profil povrchu s hodnocením charakteristik drsnosti.

Adheze tenké vrstvy

Charakterizuje přilnavost nanesené tenké vrstvy k substrátu. Nejčastěji je využíváno pro měření adheze scratch testu (tzv. vrypové zkoušky), který je založen na principu postupného zvyšování normálové síly na diamantovém Rockwellově hrotu, při současném posouvání špičky hrotu po měřené vrstvě. Velikost normálové síly, její rychlost zvyšování a rychlost posunu hrotu jsou definovány mezinárodními normami. Při měření vrstvy je detekována akustická emise, popř. třecí (tj. tangenciální) síla, která se mění (zvyšuje) při odtržení vrstvy, což koresponduje s určitou hodnotou normálové síly. Tato kritická hodnota normálové síly, při které dochází k odtržení vrstvy, se označuje jako kritické zatížení praktické adheze vrstvy. Pomocí mikroskopu se ověří na vzniklé dráze vrypu místo, kde došlo k odtržení vrstvy, a je určena přesná hodnota kritické zátěže.

Kompletní scratch test je složen ze tří nezávislých kroků. V prvním kroku je měřena topografie povrchu tenké vrstvy. Následuje tvorba vrypu dle podmínek stanovených normami, přičemž se vytváří vryp od rostoucí zatěžující normálové síly a pohybu hrotu po povrchu. Po té následuje opět skenování a zjištění topografie povrchu tenké vrstvy, tentokrát se zanechaným vrypem. Tímto získáme průběhy pěti základních charakteristických veličin měření. Křivku charakterizující topologii původního povrchu C_1 , topologii povrchu po vytvoření vrypu C_2 , průběh vertikálního pohybu hrotu během zkoušky C_3 , průběh měřené tangenciální síly mezi povrchem a hrotem C_4 a průběh aplikované normálové síly C_5 .

Z těchto naměřených veličin se určuje penetrační hloubka:

$$PD = C_3 - C_1, \quad (3)$$

rozsah reziduální hloubky, známá také jako trvalá plastická deformace:

$$RD = C_2 - C_1, \quad (4)$$

míra elastické obnovy:

$$ER = C_3 - C_2, \quad (5)$$

součinitel tření:

$$\mu = \frac{C_4}{C_5}, \quad (6)$$

a plastická rezistence:

$$PR = \frac{C_5}{RD} \quad (7)$$

před tím než dojde na povrchu k prasklinám.

5.2 Modely biologických struktur v reologii

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Určete měřením a výpočtem konstanty tuhosti vybraných elastických prvků.
- 2) Určete měřením a výpočtem konstanty tuhosti elastických prvků zapojených paralelně a v sérii, a dokažte platnost teoretických vztahů.
- 3) Měřte ztěžovaný viskoelastický materiál a vynesete závislost mezi velikostí síly a prodloužením, a to jak při natahování, tak při relaxaci zkoušeného materiálu. Definujte rozdíly mezi elastickým materiálem a viskoelastickým materiálem, a stanovte důvody vzniku hysterézní smyčky.
- 4) Určete měřením izometrickou sílu zvoleného svalu, a pro vybrané rychlosti zkracování svalu vypočtete a vynesete předpokládanou Hillovu křivku.

Teoretický základ řešených úloh

Reologie se zabývá mechanickými vlastnostmi látek, relacemi mezi napětím, deformacemi a rychlostí deformace, a z toho vyplývajícími vztahy. Silově deformační popis tkání a tkáňových struktur charakterizuje základní mechanické vlastnosti a jejich časové závislosti. Základní reologické vlastnosti jsou: viskozita, plasticita, elasticita a popř. hmotnost. Pro modelování reologických vlastností tkání používáme fundamentální elementy (také tzv. prvky) reprezentující konkrétní mechanické vlastnosti, tzv. látky, které reprezentují základní vlastnosti – elasticitu, viskozitu a plasticitu. Deformaci tkání popisujeme konstitutivními rovnicemi určenými na základě těchto jednoduchých prvků, [18].

Euklidova tuhá látka

Základní reologickou látkou je tzv. Euklidova tuhá látka - látka, která se může pohybovat, působí na ni setrvačné účinky, ale zůstává nedeformována ($\epsilon=0$). Pro tuto látku používáme symbolickou značku obr.1.



Obr.1: Symbolická značka pro Euklidovu tuhoun látku.

Hookeova pružná látka

Další důležitou základní reologickou látkou je Hookeova pružná látka, charakterizovaná elastickými vlastnostmi materiálu. Elastický materiál je takový materiál, který se po zatížení vrátí do původního stavu před zatížením. Necht' u je výchylka od původní polohy resp. délky l materiálu tj. pružiny, způsobená silou F . Pokud předpokládáme přímou úměru mezi silou a prodloužením pak výchylku označme u_e . Vratná síla F_e materiálu je pak dána vztahem:

$$F_e = k \cdot u_e, \quad (1)$$

kde k je konstanta pružiny, resp. tzv. koeficient tuhosti. Jestliže na elastický materiál působí v podélném směru síla, pak je tato síla rovna vratné síle. Prodloužení materiálu je tedy úměrné obecné zatěžující síle působící ve směru normály kolmé na rovinu průřezu, tj. ve směru podélné osy pružiny:

$$u_e = \frac{1}{k} \cdot F_e. \quad (2)$$

Délku materiálu, konkrétně např. pružiny po zatížení obecnou silou ve směru normály, určíme vztahem:

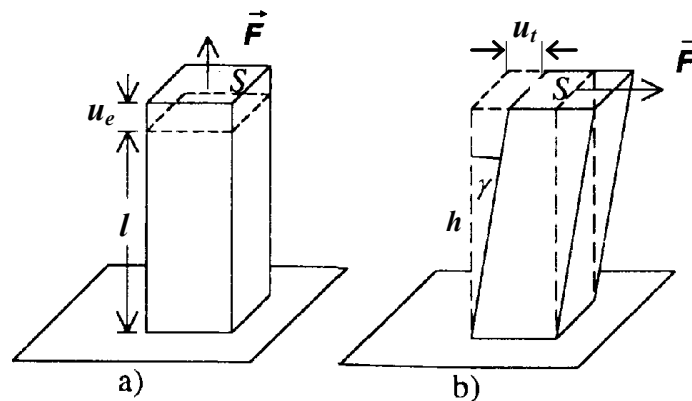
$$l' = l + \frac{F_e}{k} \quad (3)$$

Dělením prodloužení u_e původní délkou l získáme informaci o deformaci, která není závislá na délce pružiny, obecněji délce segmentu resp. vzorku (pro zjednodušení např. normalizované zkušební tyče určené pro tahové zkoušky). Toto bezrozměrné číslo se označuje ε_e a nazývá se poměrné prodloužení (relativní deformace):

$$\varepsilon_e = \frac{u_e}{l} = \frac{F_e}{k \cdot l} = \frac{S}{k \cdot l} \cdot \frac{F_e}{S} = k' \cdot \frac{F_e}{S} = k' \cdot \sigma_e = \frac{1}{E} \cdot \sigma_e \quad (4)$$

Odvozený vztah reprezentuje Hookeův zákon pro tah a tlak v oblasti malých napětí a malých pružných deformací, kde je závislost mezi mechanickým napětím a deformací lineární. Podíl působící síly F_e a plochy průřezu tyče S (někdy značené také A , z anglického slova „area“) představuje mechanické napětí a v případě tahového a tlakového působení, kdy je síla kolmá na průřez, takové napětí nazýváme normálové napětí. Veličina E je modul pružnosti v tahu neboli Youngův modul. Modul pružnosti závisí pouze na vlastnostech materiálu tělesa a nikoli na jeho rozměrech. Modul pružnosti je však závislý na teplotě, s rostoucí teplotou klesá. Hookeův zákon pro tah bývá obvykle vyjadřován slovně ve tvaru: „Napětí je úměrné poměrnému prodloužení.“, tj.:

$$\sigma_e = \frac{F_e}{S} = E \cdot \frac{u_e}{l} = E \cdot \varepsilon_e \quad (5)$$



Obr.2: a) Normálová síla \vec{F} působící kolmo na plochu S způsobí prodloužení u_e .

b) Tečná síla \vec{F} působící ve směru plochy S způsobí deformaci danou úhlem zkosu γ , [16, 19].

V případě smykové deformace, obr.2, je vztah mezi tečným (také tzv. smykovým či tangenciálním) napětím a poměrným posunutím pro malé úhly γ (také tzv. zkos či úhel smyku) dán Hookeovým zákonem ve tvaru, obr.2b:

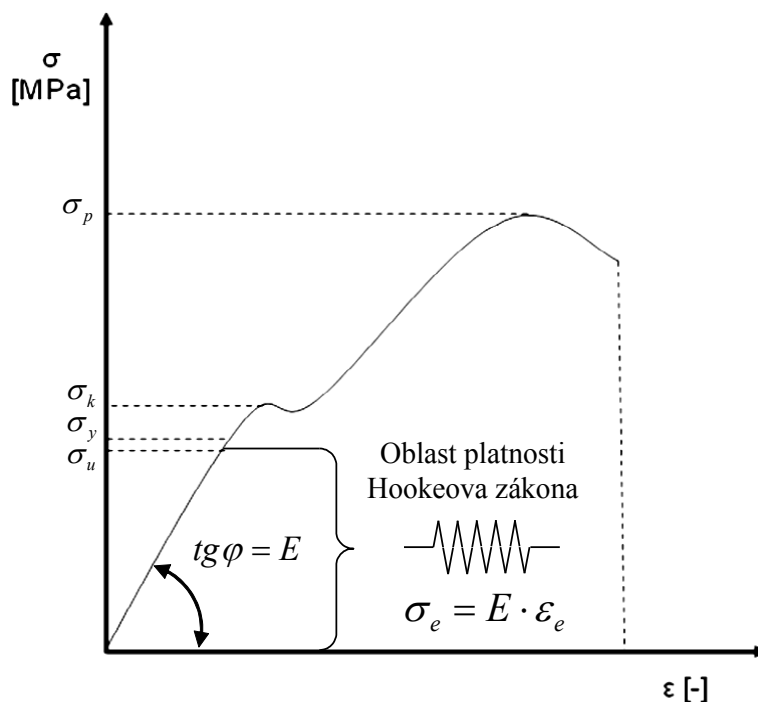
$$\tau = G \cdot \operatorname{tg} \frac{u_t}{h} \approx G \cdot \gamma, \quad (6)$$

kde konstanta úměrnosti G je modul pružnosti ve smyku, také tzv. modul torze, který je stejně jako modul pružnosti E materiálovou konstantou. Modul pružnosti v tahu E , ve smyku G a Poissonovo číslo μ jsou charakteristikami chování izotropního materiálu a platí mezi nimi vztah:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (7)$$

Pro studium deformace materiálu používáme křivku závislosti mezi napětím a deformací, tzv. pracovní diagram, obr. 3. Z diagramu zjistíme, že závislost mezi napětím a relativním prodloužením má několik oblastí, v nichž dochází v látce ke změnám. V oblasti od 0 do σ_u , tzv. oblasti „meze

úměrnosti“, je závislost lineární a platí v ní Hookeův zákon, po odlehčení zkušební vzorku materiálu deformace trvale zaniká. Překročením meze úměrnosti se dostáváme do oblasti mezi σ_u a σ_y , která již není lineární, a je charakteristická tím, že deformace nezanikne hned po působení sil, ale až po určité době. Veličinu σ_y nazýváme „mez pružnosti“, která u některých materiálů splývá s mezí úměrnosti. Dalším zvyšováním napětí se dostáváme do oblasti ohraničené hodnotou σ_y a σ_k . Veličinu σ_k nazýváme „mez kluzu (průtažnosti)“. V oblasti σ_y až σ_k dochází již k tečení materiálu, přičemž obvykle v této oblasti malá změna normálového napětí vyvolá velkou změnu relativního prodloužení. Při zvýšení napětí nad mez pružnosti dochází po odstranění zatížení k tomu, že deformace nezmizí úplně, ale zůstává jistá trvalá (tzv. plastická) deformace. Na mezi σ_k se vzorek prodlužuje, aniž by se výrazně zvětšovalo zatížení. Rovněž dochází ke změně fyzikálních vlastností materiálu, a obvykle k jeho mírnému zpevnění. Další růst napětí je provázen výrazným zmenšováním průřezu, až se dostaneme do bodu σ_p , nazývaným „mez pevnosti“, a po jehož překročení dochází k trvalé destrukci, tj. přetržení materiálu.



Obr.3: Pracovní diagram s typickou závislostí mezi napětím a relativním prodloužením, s ukázkou symbolu Hookeovy pružné látky, [16, 19].

Testování biologických materiálů, konkrétně kostí lidského těla, namáhaných v tahu/tlaku ukázalo, že se hodnota pevnosti mění s věkem subjektu. Pro výpočet pevnosti σ_{pi} , např. konkrétních kostí lidského těla, jsou na základě experimentálních měření vytvořeny kubické polynomy tvaru:

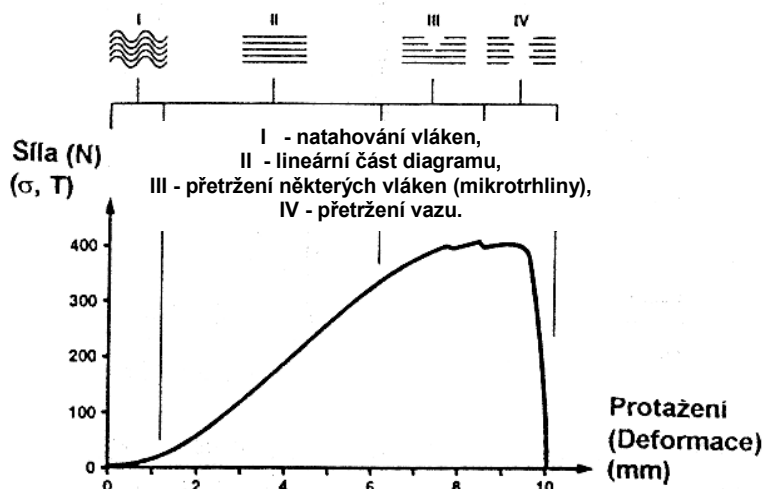
$$\sigma_{pi} = A_{0i} + A_{1i} \cdot t + A_{2i} \cdot t^2 + A_{3i} \cdot t^3, \quad (8)$$

kde t je věk jedince v rocích a A_{0i} , A_{1i} , A_{2i} , A_{3i} jsou koeficienty stanoveny experimentálně na „průměrnou“ populaci.

Symbolem Hookeovy pružné látky v reologických modelech je pružina, obr.3. Hookeova pružná látka představuje vůbec první známé vyjádření závislosti mezi deformací a zatížením.

Při experimentálním testování biomechanických vlastností tkání bylo zjištěno, že pro modelování tkáně typu šlacha a vaz můžeme použít prvek, který je založený pouze Hookeovské látce. Musíme však předpokládat, že při tahové zkoušce, tj. natahování materiálu působením vnější síly, nejprve sledujeme natažení nenapnutých vláken ve směru působící síly. Po natažení vláken následuje jejich deformace, přičemž sledujeme přímou úměru mezi silou a prodloužením, což odpovídá vlastnostem Hookeovské pružné látky, graf 1. Překročením meze úměrnosti se dostáváme do oblasti, která již

není charakterizována lineární závislostí mezi namáháním a deformací. Po překročení meze úměrnosti se deformace stává trvalou a ve struktuře se začínají vytvářet mikrotrhliny, což vede při dalším zvyšování zatížení až k celkovému přetržení vazů.



Graf 1: Tahový diagram závislosti mezi silou a prodloužením vazů během tahové zkoušky, [8, 25].

Pokud by nás zajímala deformační práce resp. potenciální energie deformované látky, pak vycházíme ze základního vztahu pro určení mechanické práce, která je dána velikostí síly způsobující postupné prodloužení du_e :

$$W = \int F_e \cdot du_e = \int (k \cdot u_e) du_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_e^2$$

Pro potenciální energii vztaženou na jednotku objemu můžeme psát:

$$U = \frac{W}{V} = \int \frac{F_e \cdot du_e}{S \cdot l} = \int \sigma_e \cdot d\varepsilon_e, \quad (9)$$

kde S je plocha průřezu deformovaného tělesa a l je jeho délka. Odtud za předpokladu Hookova zákona:

$$U = \int \frac{\sigma_e \cdot d\sigma_e}{E} = \frac{\sigma_e^2}{2 \cdot E} \quad \text{resp.} \quad U = \int E \cdot \varepsilon_e \cdot d\varepsilon_e = E \cdot \frac{\varepsilon_e^2}{2}. \quad (10)$$

Dále můžeme určit houževnatost materiálu, jedna z definic houževnatosti materiálu říká, že je to energie na jednotku objemu, kterou je materiál schopen absorbovat, než dojde k jeho porušení, tj.:

$$T = \int \sigma_p \cdot d\varepsilon. \quad (11)$$

Sériové a paralelní zapojení elastické látky

K popisu chování komplexnější látky určitého druhu se vytváří tzv. reologický model. Obecný reologický model získáme spojováním elementů, které jsou charakterizovány konkrétním typem reologické látky, přičemž jednotlivé elementy modelu lze spojovat paralelně nebo sériově. Již při použití elementů pružných látek můžeme vytvářet základní modely. Předpokládejme tedy paralelní a sériové zapojení dvou elementů pružných látek, v obecném případě může být spojeno velké množství prvků.

Jestliže je dvojice elementů pružných látek zapojena paralelně, pak:

$$F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \cdot u, \quad (12)$$

kde $u = u_1 = u_2$. Celková konstanta pružnosti k je tedy sumou konstant pružnosti k_1 a k_2 .

Jsou-li elementy pružné látky zapojeny v sérii, celková výchylka u je dána sumou výchylek u_1 a u_2 . Působící síla je identická pro oba elementy pružné látky.

$$F = k_1 \cdot u_1 \rightarrow u_1 = \frac{F}{k_1}, \quad F = k_2 \cdot u_2 \rightarrow u_2 = \frac{F}{k_2}, \quad (13)$$

přičemž $u = u_1 + u_2$ a z toho vyplývá:

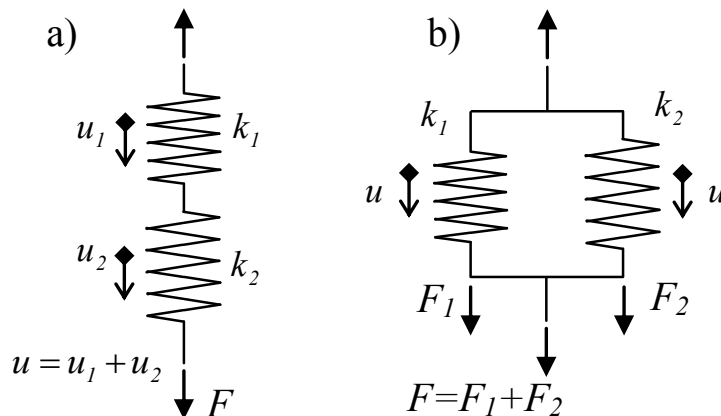
$$u = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \cdot F. \quad (14)$$

Tudíž

$$F = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \cdot u, \quad (15)$$

neboť

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (16)$$



Obr.4: a) Sériové zapojení, b) Paralelní zapojení elementů pružné látky, [25].

Tímto zapojováním reologických elementů jsme si ukázali možnost řešení nejjednodušších reologických modelů.

Vazká Newtonova kapalina

Velmi důležitou látkou, pro modelování tkání s vysokým procentem zastoupení tekutých látek, je vazká Newtonova kapalina, jež je charakterizována lineární závislostí mezi napětím a rychlostí deformace:

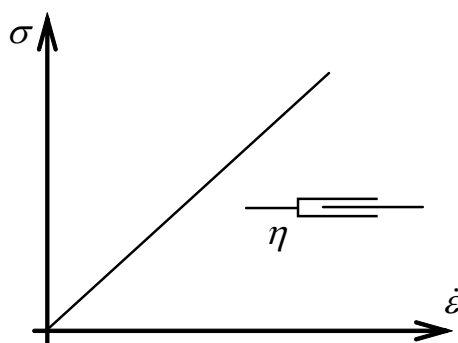
$$\sigma_v = \eta \cdot \dot{\epsilon}_v, \quad (17)$$

kde η je modul dynamické viskozity (také tzv. dynamická viskozita). Newtonův zákon viskozity je konstituční rovnicí, tj. rovnicí popisující chování kapaliny. Člen vazké látky symbolizujeme mechanickou značkou pístu, obr.5.

Pokud předpokládáme působení síly, pak:

$$F_v = b \cdot \dot{u}_v, \quad (18)$$

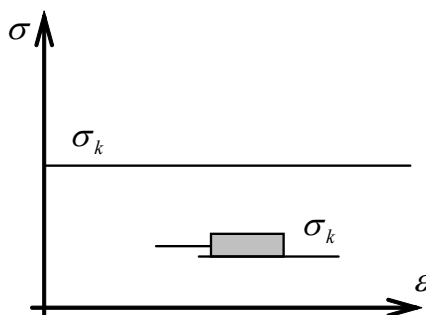
kde b je konstanta tlumení (také tzv. útlum) a derivace zkrácení či prodloužení podle času je rychlost zkracování/prodlužování kapalné látky.



Obr.5: Diagram závislosti mezi napětím na rychlosti deformace, se symbolem pro vazkou Newtonovu kapalinu.

Plastická Saint-Venantova látka

Čtvrtou důležitou látkou je plastická Saint-Venantova látka, jejíž závislost mezi napětím a deformací je charakterizována veličinou σ_k , zvanou mez kluzu. Touto látkou popisujeme plastické látky, což jsou látky, u kterých se projevuje tečení. Modelová látka při dosažení mezního napětí začne téct, přičemž napětí se udržuje na své mezní hodnotě, kterou nemůže překročit. Pro tuto látku je charakteristické rostoucí prodloužení za konstantního napětí.

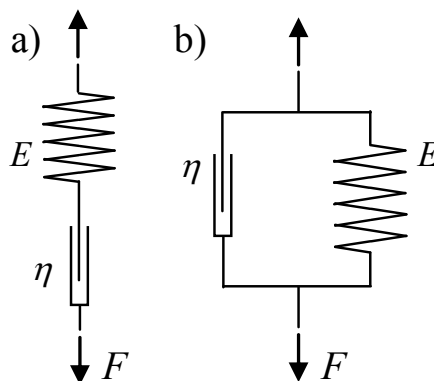


Obr.6: Diagram závislosti mezi napětím a deformací, a symbol používaný pro plastickou Saint-Venantovu látku.

Reologické modely tkáně

Z popsaných elementů základních látek a znalosti tvorby reologických modelů můžeme sestavit modely biologických struktur.

Nechť dva základní modely viskoelastických materiálů kombinují vlastnosti elastické pevné látky a viskózní kapaliny. Jedná se o modely s jednoduchým uspořádáním dvou prvků – elasticity a viskozity v sérii (Maxwellův model) a paralelně (Kelvinův-Voightův model). Na těchto modelech můžeme zavedením vnější síly simulovat a studovat odezvu materiálu v čase, tedy tečení a relaxaci.



Obr.7: a) Maxwellův model, b) Kelvinův-Voightův model.

Pro Maxwellův model můžeme psát celkovou deformaci:

$$u = u_e + u_v \quad (19)$$

a po dosazení a úpravě:

$$\dot{u} = \dot{u}_e + \dot{u}_v = \frac{\dot{F}_e}{k} + \frac{F_v}{b}, \quad (20)$$

resp.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}_e}{E} + \frac{\sigma_v}{\eta}, \quad (21)$$

odtud počáteční podmínka:

$$u(0) = \frac{F_e(0)}{k}. \quad (22)$$

Kelvinův-Voightův model popíšeme vztahem:

$$F = F_e + F_v = k \cdot u_e + b \cdot \dot{u}_v, \quad (23)$$

resp.:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E \cdot \varepsilon_e + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (24)$$

Komplexnější, tzv. standardní reologický model je v podstatě kombinace obou předcházejících a ještě lépe se přibližuje vlastnostem reálných biomateriálů. Pokud chceme na základě výše uvedených modulů vytvořit reologický model šlachy či vazy, vycházíme z předpokladu, že sami negenerují sílu, pouze přenáší či zachycují vnější síly na ně působící. Šlacha či vaz musí mít značnou pevnost, aby byly schopné přenést velké síly, a současně musí mít značnou poddajnost, aby dokázaly zabránit poškození svalově kosterního systému. K modelování reologického chování šlach či vazů se v literatuře převážně používají modely látky Zenerovy a látky Poyntingovy-Thompsonovy.

Při sestavování konstitutivní rovnice Poyntingovy-Thompsonovy látky předpokládejme, že napětí a deformace na jednotlivých prvcích modelu jsou označeny příslušným indexem odpovídajícím označení konkrétního prvku, tak jak je naznačeno na obr.8.

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3 \Rightarrow \sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 = E_2 \cdot \varepsilon_2 + \eta_3 \cdot \dot{\varepsilon}_2, \quad (25)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad (26)$$

odtud po dosazení:

$$\sigma = E_2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta_3 \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1) \quad (27)$$

a užitím dostáváme konstitutivní rovnici závislosti mezi napětím a deformací Poyntingovy-Thompsonovy látky:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_3} \cdot \sigma = E_1 \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_3} \cdot \varepsilon. \quad (28)$$

Konstitutivní rovnici Zenerovy látky získáme podobným způsobem jako v předešlém případě:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad (29)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (30)$$

odtud po dosazení:

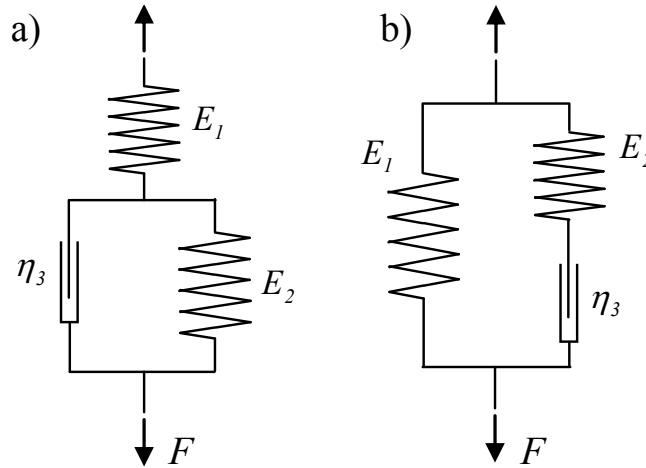
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{\eta_3} \quad (31)$$

a postupnou úpravou, za předpokladu $\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon$, dostáváme konstitutivní rovnici Zenerovy látky:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_3} \cdot \sigma = (E_1 + E_2) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_3} \cdot \varepsilon \quad (32)$$

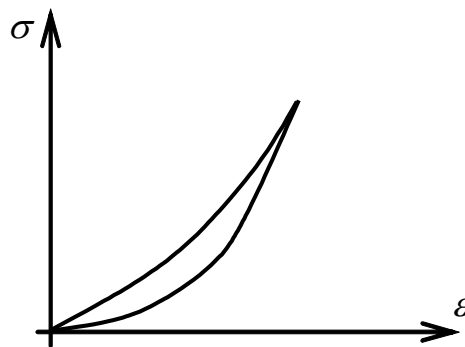
Oba tyto modely látky Zenerovy a látky Poyntingovy-Thompsonovy mají shodný charakter s odlišnými koeficienty a , b , c rovnice:

$$\dot{\sigma} + a \cdot \sigma = b \cdot \dot{\varepsilon} + c \cdot \varepsilon \quad (33)$$



Obr.8: a) Poyntingova-Thompsonova látka, b) Zenerova látka.

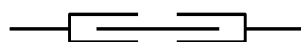
Graf č. 2 ukazuje očekávaný průběh pracovního diagramu závislosti mezi napětím a poměrným prodloužením u biologických tkání s předpokládaným vznikem hysterézní smyčky. Průběh křivky reprezentuje dvě fáze experimentálního měření vzorku materiálu, první fáze diagramu odpovídá rostoucímu napětí tj. zatížení, a po té následuje fáze odlehčování zkoušeného vzorku. Sklon křivky je dán nejen velikostí deformace, ale také rychlostí změny deformace materiálu. V případě, že nedojde k plastické deformaci resp. trvalému porušení materiálu, se materiál vrací na původní délku.



Graf 2: Očekávaný průběh diagramu závislosti mezi napětím a deformací viskoelastických materiálů, [8].

Model svalů

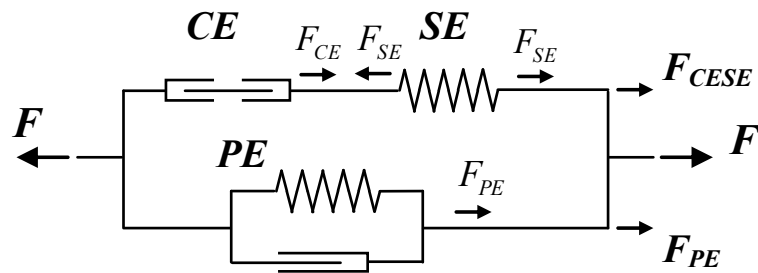
V případě modelování svalů musíme ještě předpokládat v reologickém modelu existenci aktivního kontraktálního členu.



Obr.9: Symbolická značka pro aktivní kontraktilní člen dle [8].

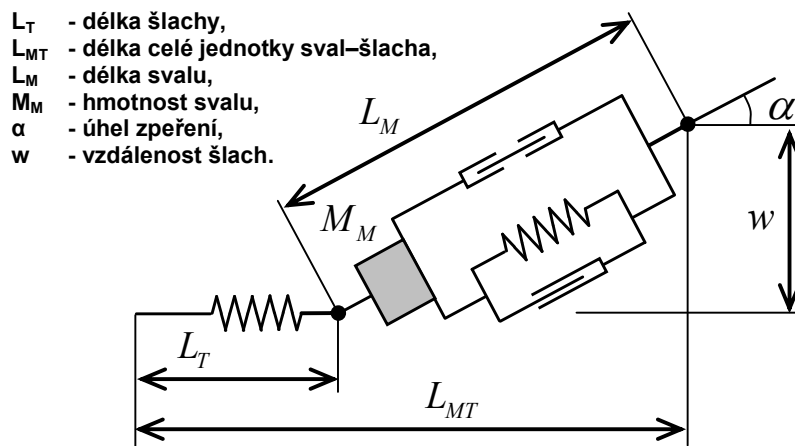
První model svalů na makroskopické úrovni byl navržen roku 1938 A.V.Hillem. Základní Hillův model svalů je tvořen sériovou částí představující především vlastnosti aktivního (excitovaného)

svalu (vazby aktinu a myosinu) a paralelní částí modelu, zastupující vlastnosti relaxovaného svalu (vazivová tkáň, cévy a inervace).



Obr.10: Hillův model kosterního svalu.

Hlavní kontraktilní schopnost je obsažena v elementu *CE*, obr.10. Tato část reprezentuje komplexní dynamiku stahujícího se svalu a je hlavním aktivním zdrojem síly F . Bloky *SE* a *PE* tvoří základní pasivní prvky mechanického modelu. Prvek *SE* reprezentuje, mimo jiné, především vlastnosti šlach. Prvek *PE* reprezentuje vlastnosti tkání, které obklopují svalová vlákna. Na základě původního Hillova modelu byla vytvořena celá řada modifikací, např. rozšíření modelu zohledňující hmotnost svalu a závislost mezi úhlem zpeření a délkou svalu, neboť sval není se šlachou vždy v jedné přímce, ale většinou je odkloněn o úhel zpeření.



Obr.11: Hillův model jednotky sval–šlacha.

Šlacha, jejíž délka je označena L_T , je v modelu zapojena ke svalu o délce L_M sériově a je reprezentována elasticitou. Sval se skládá ze dvou částí: aktivního kontraktilního členu a k němu paralelně zapojeného pasivního členu. Pasivní člen v sobě zahrnuje paralelně zapojený elastický prvek, který popisuje pasivní svalovou elasticitu, a tlumící prvek, který odpovídá pasivní svalové viskozitě. Celková délka jednotky sval–šlacha je označena L_{MT} . Sval není se šlachou v jedné přímce, ale je odkloněn o úhel zpeření α . Symbol w označuje vzdálenost šlach a vypočte se vztahem:

$$w = L_M \cdot \sin(\alpha), \quad (34)$$

obvykle se při kontrakci svalu mění úhel zpeření, a tím také vzdálenost šlach resp. délka svalu. Podle vnějších projevů svalové kontrakce se rozlišuje několik základních druhů kontrakce svalu. Dochází-li při aktivní činnosti svalu k jeho zkracování, jde o tzv. koncentrickou kontrakci. Pokud se vzdálenost úponů nemění, jde o izometrickou kontrakci. Pokud břemeno, část těla či jiné těleso, které je příslušným svalem „neseno“, působí na sval silovou zátěží převyšující schopnost svalu se zkracovat a dochází k prodlužování svalu i přesto, že je aktivně „kontrahován“, jedná se o excentrickou kontrakci. Kritériem také může být, jakou rychlostí dochází ke svalové kontrakci. Speciálním případem je dosažení konstantní rychlosti zkracování po celou dobu konání kontrakce,

jedná se o tzv. izokinetickou kontrakci. Dalším, teoretickým, případem je izotonická kontrakce, kdy je silové působení na úponovou šlachu svalu konstantní v průběhu celé kontrakce, tj. napětí ve svalu je během celé činnosti přibližně stejné.

Bylo zjištěno, že když se sval aktivně zkracuje, produkuje méně síly, než by tomu bylo při izometrických podmínkách. Abychom mohli studovat závislost mezi silou svalu a rychlostí kontrakce svalových vláken, použijeme tzv. Hillovu rovnici. Tuto rovnici můžeme využít k odvození hodnot veličin v Hillově modelu, který zohledňuje silové účinky od kontraktilního elementu svalu, resp. změnu délky kontraktilního elementu, a odtud celé délky modelu soustavy sval-šlacha. Hillova rovnice vychází z energetické resp. výkonové bilance svalové kontrakce, při které se kromě konání mechanické práce uvolňuje v důsledku probíhajících chemických reakcí také teplo:

$$E = A + S + W, \quad (35)$$

kde E je celková uvolňovaná energie svalem za jednotku času ($J \cdot s^{-1}$), A je udržovací teplo svalu uvolněné za jednotku času při izometrické kontrakci ($J \cdot s^{-1}$),

$$W = F \cdot v \quad (36)$$

je mechanický výkon svalu ($J \cdot s^{-1}$), F je síla svalu (N), v je rychlost zkracování svalu ($m \cdot s^{-1}$),

$$S = a \cdot v \quad (37)$$

je uvolněné kontraktilní teplo za jednotku času při zkracování svalu. Konstanta a má rozměr síly a je zjišťována výpočtem z experimentálního měření. Jestliže se sval nachází v izometrických podmínkách, pak:

$$E = A, \quad (38)$$

tj. velikost uvolňované energie je rovna udržovacímu teplu. Výkonnost svalu je $\eta = W / E$.

Na základě řady experimentů byl navržen empirický vztah:

$$S + W = b \cdot (F_0 - F) \Rightarrow a \cdot v + F \cdot v = b \cdot (F_0 - F), \quad (39)$$

kde F_0 je izometrický (popř. maximální) tah svalu při optimální délce svalu tj. optimálním uspořádání sarkomer, konstanta b má rozměr rychlosti a je opět zjišťována výpočtem z experimentálního měření. Řada experimentů se uskutečňuje na intaktním lidském kosterním svalu a to s využitím izokinetických zkušebních zařízení. Z tohoto důvodu je výhodné zavést v jako nezávisle a sílu F jako závisle proměnnou, tj.:

$$F = \frac{F_0 \cdot b - a \cdot v}{b + v}, \quad (40)$$

popř. po úpravě:

$$v = \frac{b \cdot (F_0 - F)}{F + a}. \quad (41)$$

Ke stanovení hodnot veličin Hillovy rovnice se využívá experimentů uskutečněných buď na intaktním svalovém vlákne, nebo celém svalu. Nejprve se např. určí F_0 izometrickým experimentem a poté určujeme rychlost zkracování svalu z izotonického experimentu pro dané F . Konstanty a a b se určí např. alespoň pomocí lineární regrese, která zabezpečí, aby rovnice byla dostatečným přiblížením k experimentálním výsledkům. Dodejme, že z rovnice maximální rychlost izotonického zkracování svalu v_0 odpovídá nulové síle svalu ($F = 0$):

$$v_0 = \frac{b \cdot F_0}{a} \Rightarrow \frac{a}{F_0} = \frac{b}{v_0} = k \approx 0,25. \quad (42)$$

Zobrazením Hillovy rovnice v grafu závislosti $v - F$ a výpočtem mechanického výkonu získáme Hillovu křivku popisující výkonové charakteristiky kosterního svalu. Z křivky je možné odvodit aktuální mechanický výkon produkovaný svalem v závislosti na síle svalu a aktivním stavu svalu. Okamžitý výkon svalu je určen vztahem:

$$W(v) = F(v) \cdot v \Rightarrow W = F \cdot v = \frac{v \cdot (b \cdot F_0 - a \cdot v)}{v + b} \quad (43)$$

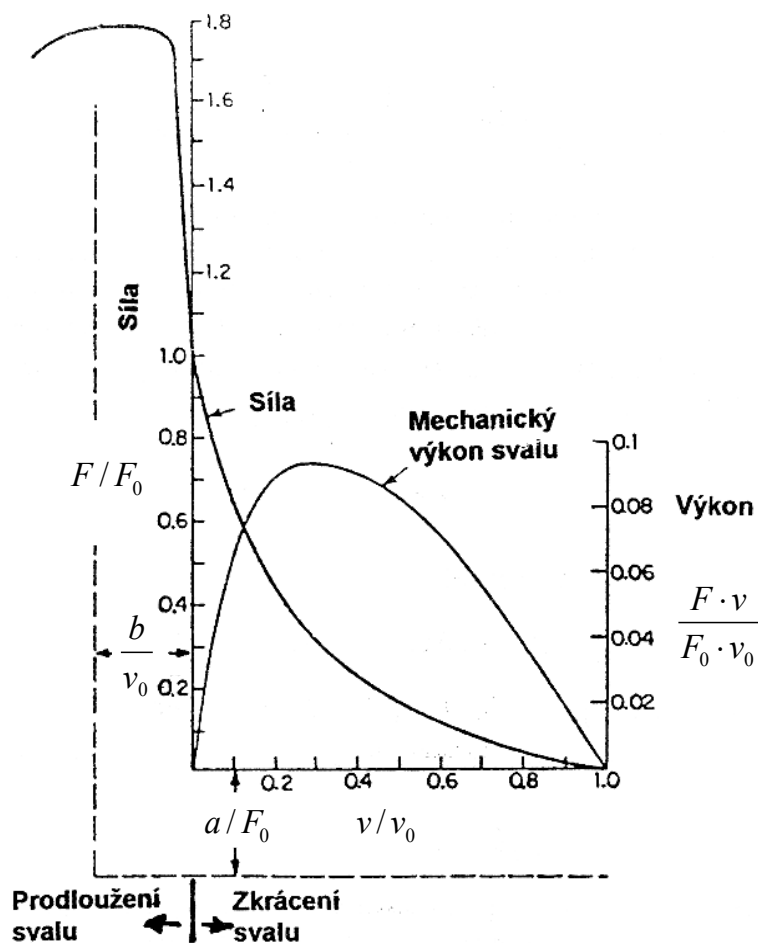
Mechanická práce svalu během kontrakce může být, např. za předpokladu konstantní síly (izotonická kontrakce), určena vztahem:

$$W_B = F \cdot \Delta L_M, \quad (44)$$

kde ΔL_M je změna délky kontrahujícího se svalu. Z grafu závislosti $v-F$ je zřejmé, že s přibývajícím schopností konat velmi rychlou kontrakci klesá schopnost přenášet vyšší silové zatížení. Maximální výkon je dosažen při zatížení svalu přibližně třetinovou silou, než je síla maximální, která je měřena při izometrické kontrakci. Hodnotu maximálního výkonu bychom zjistili z předpokladu (graf 3):

$$W = W_{\max} \Rightarrow \frac{dW}{dv} = 0. \quad (45)$$

K měřením sil a rychlostí zkracování svalů se využívá především speciálních dynamometrických přístrojů. Nejčastěji se, např. ve sportovní biomechanice, využívá izokinetické dynamometrie. Všechny izokinetické přístroje pracují na stejném principu: rameno páky, s kterým je proband v kontaktu, se pohybuje předem nastavenou úhlovou rychlostí. To je umožněno skutečností, že tlačí-li proband do podložky páky či madla silněji, přístroj zvětší odpor a rychlost zůstává konstantní. Odpor je tedy proměnlivý a odpovídá změnám v síle vyvíjené svaly v jednotlivých fázích pohybu. Výkon svalu se pak měří pomocí dynamometrů identifikujících jak sílu, tak systém určí rychlost zkracování svalů segmentů těla. K nejznámějším izokinetickým přístrojům patří Cybex, Kin Com, Isomed, Biodex.



Graf 3: Hillova křivka mechanického výkonu svalu, [17, 18].

5.3 Pevnostní návrh zdravotnických pomůcek

Úkoly měření a výpočtu

- 1) Proveďte pevnostní výpočet a určete deformaci protetické náhrady předloktí namáhané ohybem.
- 2) Předpokládejte kruhovou tyč namáhanou krutem. Určete velikost krouticího momentu a napětí od krutu, určete deformace.
- 3) Vypočtete namáhání součástky protetické náhrady na vybrané kombinované namáhání (tlak a ohyb; krut a ohyb; atp.).
- 4) Určete minimální velikost průřezu tyče protézy, aby nedošlo k jejímu trvalému poškození pro vybrané typy namáhání (ohyb; krut; stříh; tah).

Teoretický základ řešení úlohy

Vývoj nejen mechanických, ale také softwarových a dalších zdravotnických pomůcek, bývá realizován dvěma typy procesů a to buď přímým inženýrstvím, nebo zpětným inženýrstvím. Přímé inženýrství představuje běžný proces vývoje systému v oblasti inženýrství. To znamená postupný přesun od shromažďování požadavků na systém, přes vysokoúrovňový návrh systému, k postupně nižším úrovním návrhu systému a implementaci. Přídavné jméno „přímé“ před slovem inženýrství se může zdát zbytečné, nicméně je potřebné z hlediska odlišení přímého inženýrství od zpětného inženýrství. V designu lékařských pomůcek se často využívá zpětné inženýrství (též tzv. reverzní inženýrství, zn. RE). RE je proces, jehož cílem je odkrýt charakteristiky, vlastnosti či princip fungování zkoumaného předmětu, většinou za účelem sestavení ekvivalentního objektu nebo jeho modelu. Mezi obvyklé postupy RE patří měření a analýza struktury předlohy (dekompozice) a zkoumání „vnitřních vztahů“ částí objektu resp. systému. Výstup může být podkladem k vytvoření nového či vylepšení původního designu. Z oblasti biomechaniky se jedná o aplikace v:

- Ergonomii produktu – pro návrh a dokončení finálního designu produktu.
- Zdravotnictví – možnost vytvořit vysoce přesné reprodukce orgánů a celých struktur.
- Ortopedickém inženýrství – při tvorbě ortopedických pomůcek poskytují naskenovaná data podklady konstruktérům pro navržení výsledného produktu přesně na míru pacientovi.

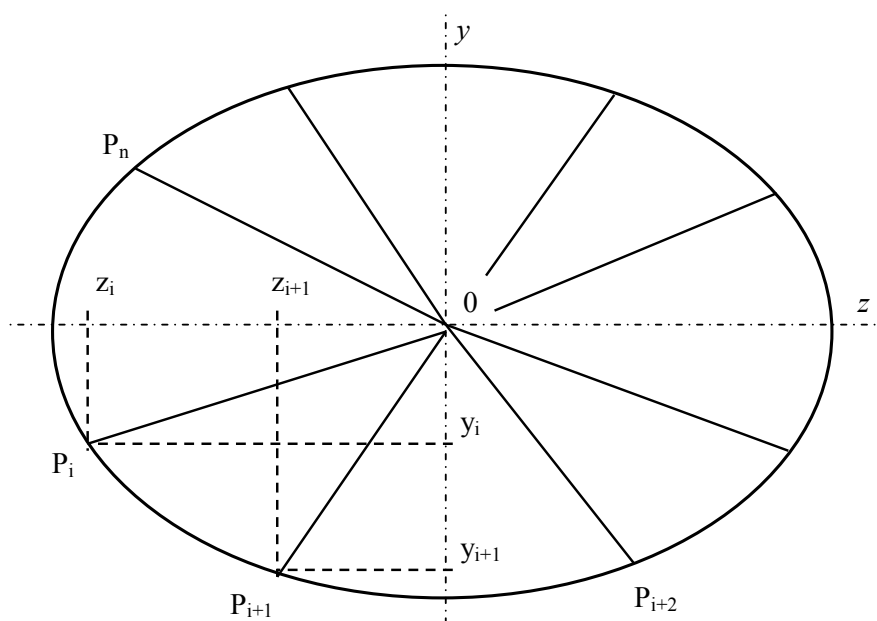
V biomechanice je často RE používáno pro tvorbu 3D modelu skutečného objektu. Procesu tvorby 3D modelu se říká skenování, resp. digitalizace, někdy též trojrozměrná numerizace. Veličiny charakterizující skenovaný objekt získáváme snímáním prostorových souřadnic bodů z povrchu snímaného objektu, které bývají obvykle zobrazovány na monitoru počítače v reálném čase. Podle způsobů snímání bodů lze 3D skenery, tj. systémy snímající prostorové souřadnice bodů, rozdělit na dotykové, optické, laserové, destruktivní, rentgenové a ultrazvukové. Po procesu digitalizace je model využit pro další modelování a analýzu. V našem případě se bude jednat o pevnostní výpočty, tj. výpočty deformací a napětí v konstrukčních prvcích zdravotnických pomůcek nebo biologických orgánech a strukturách.

Mezi nejdůležitější činnosti konstruktéra patří předvídaní chování navrženého prvku či systému v různých situacích. Konstruktér musí provádět různé typy výpočtů, aby mohl dostatečně dimenzovat jednotlivé uzly a prvky. Pro základní konstrukční výpočty jsou používány analytické metody, jejichž vznik sahá mnohdy až do 19. století. Tyto metody byly postupem času upravovány a zdokonalovány. Jejich hlavní nevýhodou je, že jsou vhodné pouze pro určitý typ konstrukčních prvků a lze jimi obecně řešit jen velmi jednoduché případy, neboť jsou založeny na zjednodušování komplikovaných tvarů atp., a tudíž nejsou schopny plně postihnout realitu skutečného prvku nebo mechanismu. Výhodou je však jejich jednoduchost a rychlost výpočtu, takže jsou i v současnosti použitelné pro výchozí představu o způsobu a velikosti namáhání konstrukčních prvků a tedy i dimenzování konstrukcí. Bez užití moderních metod se i dnes při řešení úloh praxe postupuje tak, že řešený systém se výrazně zjednoduší. Obvykle jde o takové zjednodušení, aby postupy řešení a výsledky mohly být porovnávány se známými řešeními uvedenými v tabulkách, katalozích, atp. Prvními

programovými nástroji v systémech CAD (Computer Aided Design) byly výpočtové moduly vycházející právě z analytických metod.

Výpočet průřezových charakteristik

Abychom mohli uskutečnit konstrukční návrh mechanických částí systému či pouze provádět napěťově deformační analýzu, je nutné k nalezení řešení znát průřezové charakteristiky z technické teorie prutů tažených/tlačených, ohýbaných, kroucených, atp. Jedná se o veličiny, jakými jsou např. poloha těžiště plochy průřezu, plocha průřezu, statický moment, deviační moment, moment setrvačnosti, polární moment, poloha hlavních os průřezu, velikost poloos elipsy setrvačnosti průřezu, atd. V praxi obvykle pro nalezení hodnot veličin zavádíme takové zjednodušení, abychom mohli k výpočtu využít známých postupů uvedených v tabulkách, katalozích, atp. V biomechanice často potřebujeme řešit složitější nesymetrické tvary průřezu, než tomu je v obecné mechanice, kde průřezové charakteristiky pro základní tvary najdeme ve strojnických tabulkách. K řešení problému proto používáme metodu rozdělení složitého tvaru průřezu na konečný počet průřezů trojúhelníkového tvaru, obr.1.



Obr.1: Dělení složitého tvaru průřezu na konečný počet průřezů trojúhelníkového tvaru.

Hranice původního průřezu bude, po rozdělení složitého tvaru průřezu na průřezy trojúhelníkového tvaru, lomená čára (polygon). Následně zvolíme v libovolném místě počátek souřadnic 2D souřadného systému a v souřadném systému určíme souřadnice vrcholů trojúhelníků na polygonu. Poté můžeme přikročit k řešení průřezových charakteristik, nejprve určíme sumu všech ploch trojúhelníků, tj. plochu polygonu:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i). \quad (1)$$

Pro určení statických momentů plochy průřezu využijeme vztahy:

$$S_y = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (z_i + z_{i+1}) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i), \quad (2)$$

$$S_z = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i). \quad (3)$$

Ze znalosti velikosti statických momentů můžeme určit souřadnice těžiště celého průřezu v rámci námi libovolně zvoleného souřadného systému:

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{I}{6 \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i), \quad (4)$$

$$z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{I}{6 \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^n (z_i + z_{i+1}) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i). \quad (5)$$

Momenty setrvačnosti průřezu tvaru polygonu určíme vztahem:

$$I_y = \frac{I}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (z_i^2 + z_i \cdot z_{i+1} + z_{i+1}^2) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i), \quad (6)$$

$$I_z = \frac{I}{12} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_{i+1}^2) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i), \quad (7)$$

a deviační moment

$$D_{yz} = \frac{I}{24} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i \cdot z_{i+1} + 2 \cdot y_i \cdot z_i + 2 \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+1} + y_{i+1} \cdot z_i) \cdot (z_i \cdot y_{i+1} - z_{i+1} \cdot y_i). \quad (8)$$

Moment setrvačnosti a deviační moment přepočítáme k těžišti polygonu Steinerovou větou, abychom získali centrální momenty setrvačnosti a centrální deviační moment:

$$I_{yC} = I_y - A \cdot z_C^2, \quad (9)$$

$$I_{zC} = I_z - A \cdot y_C^2, \quad (10)$$

$$D_{yzC} = D_{yz} - A \cdot y_C \cdot z_C. \quad (11)$$

Odtud hlavní (extrémní) centrální momenty setrvačnosti dle Mohrovy kružnice:

$$I_{1,2} = \frac{I_{yC} + I_{zC}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{yC} - I_{zC}}{2}\right)^2 + D_{yzC}^2} \quad (12)$$

a musí platit $I_{yC} + I_{zC} = I_1 + I_2$, přičemž součet těchto hodnot také odpovídá hodnotě polárního momentu I_p . Dále určíme směr (úhel natočení) hlavních centrálních os průřezu v původně zvoleném souřadném systému:

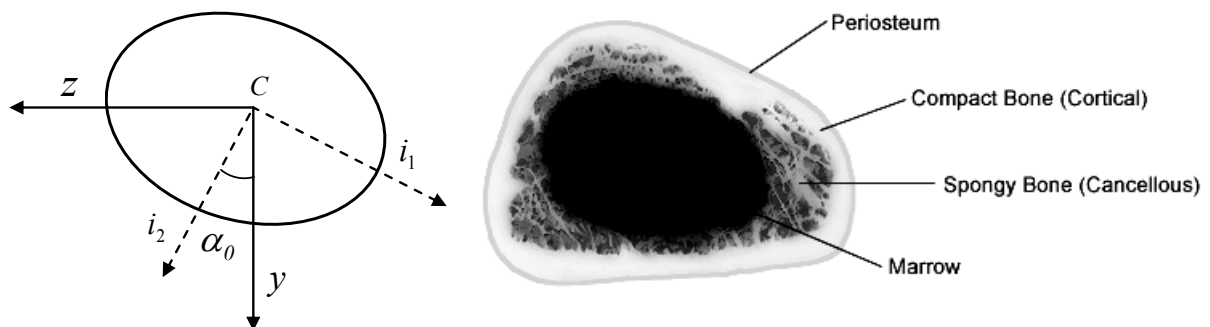
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot D_{yzC}}{I_{yC} - I_{zC}}, \quad (13)$$

a pro centrální elipsu setrvačnosti hlavní poloměry setrvačnosti:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}. \quad (14)$$

Dle směru hlavních os a velikostí poloos elipsy můžeme zakreslit elipsu setrvačnosti tak, že souřadný systém v těžišti pootočíme o α_0 a kolmo k osám vyneseme i_1 a i_2 jako poloosy elipsy setrvačnosti. Na kterou stranu vynést i_1 a i_2 se rozhodneme tak, že větší z poloměrů vyneseme ve směru, kde je průřez tužší v ohybu, obr.2.

Dodejme, že pokud se ve složitém tvaru plochy průřezu nachází otvor, je také nahrazen polygonem, a pro získání charakteristik tvaru průřezu s otvorem průřezové charakteristiky určované pro otvor ve výpočtech od charakteristik plného průřezu odečítáme.

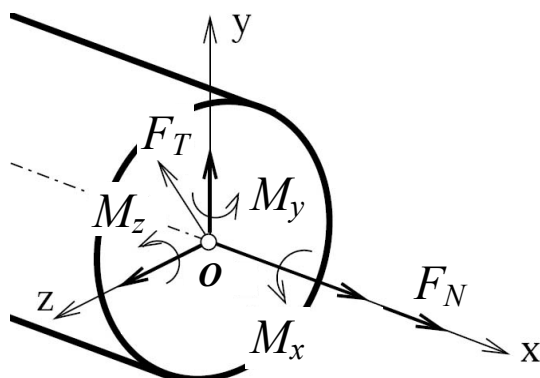


Obr.2: Elipsa setrvačnosti a příklad řešeného tvaru průřezu kosti, [4].

Po určení průřezových charakteristik průřezu můžeme přistoupit k výpočtu napětí a deformací konkrétního konstrukčního prvku. Vnější síly a momenty působící na konstrukční prvek obecně vyvodí v průřezu vnitřní silové a momentové účinky. Vnější síly a momenty lze rozložit do složek ve směru os pravoúhlé soustavy souřadnic s počátkem v těžišti průřezu. Jedná se o tyto složky:

- Normálová síla (F_N , obr.3), ta namáhá průřez v tahu/tlaku a působí kolmo na průřez konstrukčního prvku (ve směru jeho podélné osy), působením normálové síly se prvek prodlouží nebo zkrátí;
- Tangenciální síly (F_T , obr.3), složky tangenciální síly působí v rovině průřezu (kolmo k podélné ose), způsobí smyková napětí a tím posunutí průřezu v jeho rovině, vzniklá deformace od tangenciální síly je zkosení;
- Ohybové momenty (M_y a M_z , obr.3), způsobí normálové napětí, namáhají element prvku ohybem a způsobují jeho prohnutí;
- Kroucí moment (M_x , obr.3), vyvozuje smykové napětí a způsobí zkroucení, tj. vzájemné pootočení dvou rovnoběžných průřezů kolmých k podélné ose.

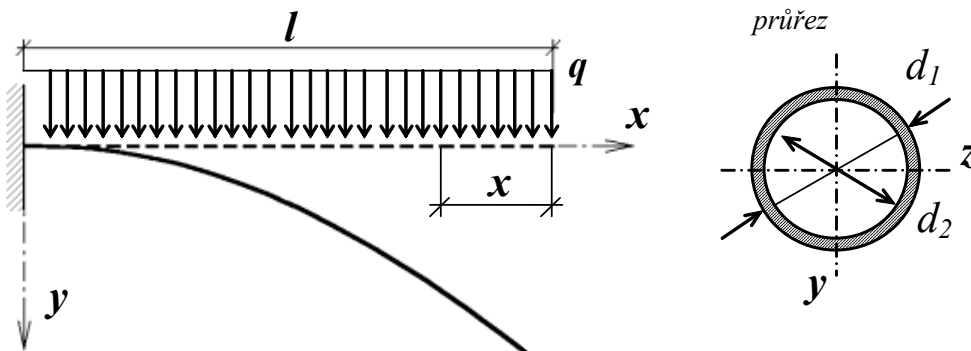
Materiály konstrukčních prvků jsou tedy vystaveny různému namáhání, základní typy namáhání, kterým odpovídají příslušné hlavní typy deformaci, jsou: tah/tlak, ohyb, krut, smyk.



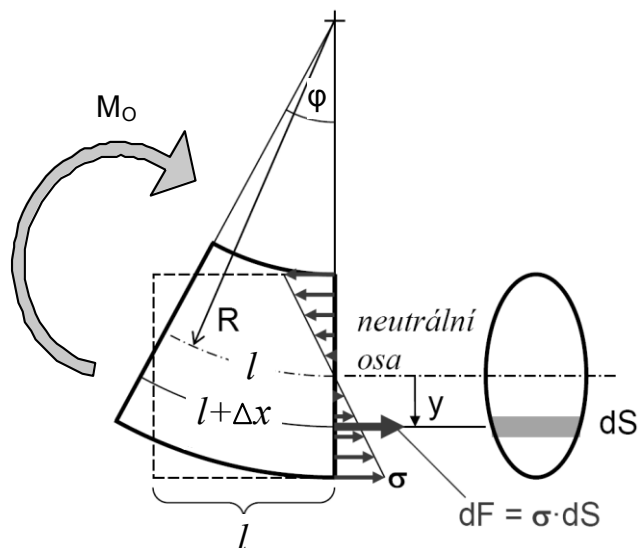
Obr.3: Síly a momenty přenášené průřezem při obecném vnějším namáhání.

Určení napětí ohýbané konstrukční části

Namáhání ohybem je způsobeno silovou dvojicí ležící v rovině kolmé na rovinu řezu, nebo-li ohybovým momentem. Při namáhání ohybem se část vláken součásti prodlužuje (je namáhána na tah), část se zkracuje (je namáhána tlakem), prvek se „ohýbá“ a velikost jeho deformace se vyjadřuje průhybem nebo úhlem natočení průřezu. Jedná se o velmi častý případ namáhání, s kterým se setkáme v biomechanice (ohyb kostí, konstrukcí protetických náhrad a zdravotnických lůžek, atd.).



Obr.4: Schéma deformované konstrukční části, konkrétně vetknutého nosníku, zatížené rovnoměrným spojitým zatížením od vlastní hmotnosti.



Obr.5: Schéma namáhání elementu konstrukčního prvku ohybem.

Uvažujme část konstrukčního prvku délky l , např. část nosníku, obr.5. Z předpokladu zachování rovinnosti průřezů vyplývá, že dva rovinné průřezy, původně kolmé k podélné ose nosníku (navzájem rovnoběžné), spolu budou po prohnutí svírat jistý úhel φ . Dále předpokládejme, že v jistém místě průřezu bude napětí nulové, tedy i deformace nulová a původní délka l zde zůstane zachována, obr.5. Toto místo se nazývá neutrální osa, neutrální osa se vlivem prohnutí zakříví s poloměrem křivosti R . V libovolném místě, daném souřadnicí y od neutrální osy, se délka l zvětší či zmenší o Δx . Pro malé úhly φ pak platí:

$$\varphi \approx \frac{l}{R} = \frac{l + \Delta x}{R + y} = \frac{\Delta x}{y} \quad (15)$$

Dále můžeme vyjádřit poměrnou deformaci:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{l} = \frac{l}{R} \cdot y. \quad (16)$$

Platí-li dále Hookův zákon, můžeme formulovat první důležitý závěr: Napětí se po výšce profilu mění lineárně:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{R} \cdot y, \quad (17)$$

kde E je modul pružnosti v tahu a R je poloměr zakřivení neutrální osy. Další úvahy se budou týkat silového rozboru. Ve vzdálenosti y od neutrální osy uvažujme nekonečně malou plošku dS , obr.5. Šířka plošky odpovídá šířce profilu, výška je nekonečně malá dy . Této plošce odpovídá nekonečně malá síla:

$$dF = \sigma \cdot dS.$$

Z rovnice rovnováhy pro směr osy nosníku vyplývá:

$$\begin{aligned} \int dF &= \int_S \sigma \cdot dS = 0 \\ \int_S \frac{E}{R} \cdot y \cdot dS &= \frac{E}{R} \cdot \int_S y \cdot dS = 0 \\ \int_S y \cdot dS &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Předpokládejme dále vztah vycházející ze statických momentů, které určují souřadnici těžiště plochy:

$$y_T = \frac{\int y \cdot dS}{S} = 0. \quad (19)$$

Z výše uvedeného vyplývá, že neutrální osa prochází těžištěm průřezové plochy nosníku. Dále předpokládejme řešení momentové rovnice rovnováhy, odkud vyplývá kvantitativní vyjádření napětí:

$$\begin{aligned} \int dF \cdot y &= M_O \\ \int_S \sigma \cdot dS \cdot y &= M_O \\ \int_S \frac{E}{R} \cdot y \cdot dS \cdot y &= M_O \\ \frac{E}{R} \cdot \int_S y^2 \cdot dS &= M_O, \end{aligned} \quad (20)$$

kde M_O je ohybový moment, kterým je nosník namáhán, a uvedený integrál představuje kvadratický moment průřezu vzhledem k neutrální ose $I_z = I_{zC}$.

$$I_z = \int_S y^2 \cdot dS$$

a po dosazení:

$$\frac{E}{R} \cdot I_z = M_O \Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{M_O}{I_z}, \quad (21)$$

závěr tedy již přímo určuje rozložení napětí po výšce profilu:

$$\sigma = \frac{E}{R} \cdot y = \frac{M_O}{I_z} \cdot y. \quad (22)$$

a odtud:

$$\sigma = \frac{M_O}{I_z} \cdot y = \frac{M_O}{W_O} \leq \sigma_D \quad (23)$$

kde W_O je modul průřezu v ohybu, jenž je dán rozměrovými parametry průřezu resp. jeho průřezovými charakteristikami. Vypočtená hodnota napětí pak musí být menší než maximální dovolené napětí v ohybu σ_D , které odpovídá maximálnímu dovolenému normálovému napětí a které je dáno druhem resp. vlastnostmi ohýbaného materiálu. Průřezové charakteristiky jsou obvykle počítány pro základní geometrické tvary průřezu pomocí již předem odvozených vztahů, které jsou uvedeny v tabulkách či katalogích. V případě složitějších tvarů nejprve průřez rozdělíme na základní geometrické tvary a až po určení průřezových charakteristik základních geometrických tvarů z nich řešíme výsledné průřezové charakteristiky celého složitějšího průřezu, na tomto způsobu řešení je založena také výše uvedená metoda řešení rozkladem složitějšího tvaru průřezu na konečný počet průřezů trojúhelníkového tvaru. Odvozený vztah pro určení průřezového modulu v ohybu průřezu tvaru mezikruží, obr.4, má tvar:

$$W_O = \frac{\pi \cdot (d_1^4 - d_2^4)}{32 \cdot d_1}. \quad (24)$$

Pokud bude např. protetická náhrada tvořena pouze kruhovým průřezem o průměru d_1 , pak:

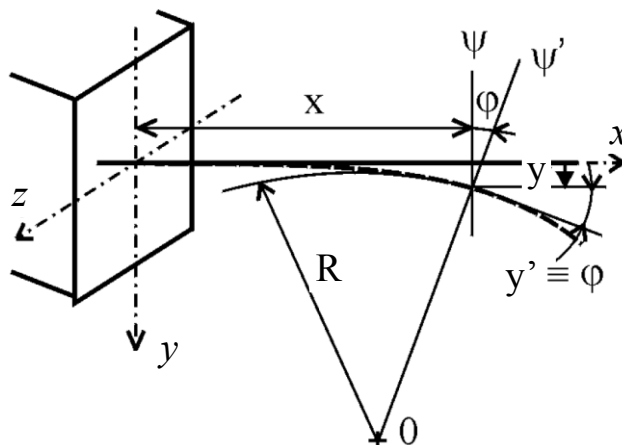
$$W_O = \frac{\pi \cdot d_1^3}{32}. \quad (25)$$

Z výše uvedeného můžeme určit minimální přípustné hodnoty průřezového modulu v ohyb, a odtud následně minimální přípustné rozměry požadovaného tvaru průřezu, aby zvolený tvar průřezu pevnostně vyhovoval maximálnímu ohybovému momentu M_{Omax} , kterým je konstrukční prvek namáhán:

$$W_O = \frac{M_{Omax}}{\sigma_D} \quad (26)$$

Určení deformace ohýbané konstrukční části

Pokud nás bude zajímat deformace, tj. průhyb, při řešení budeme vyšetřovat tzv. průhybovou čáru, tj. spojnicí těžiště jednotlivých řezů nosníku. Před deformací je to přímka, po deformaci křivka.



Obr.6: Schéma deformace konstrukční části namáhané na ohyb.

Řešení provedeme pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry. Z výše uvedených vztahů a předpokladu, že křivost je převrácená hodnota poloměru křivosti a udává velikost zakřivení křivky v bodě, můžeme psát:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{M_O}{E \cdot I_z} \quad (27)$$

Pro křivost rovinné křivky je odvozen vztah:

$$\frac{1}{R(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (28)$$

kde y je souřadnice udávající velikost průhybu nosníku, obr.6, a $x \in \langle 0, l \rangle$. S uvážením předpokladu

velmi malých průhybů, tj. průhyb je mnohokrát menší než délka, $\frac{dy}{dx} \ll 1$, lze její kvadrát vůči 1 zanedbat a bez újmy na přesnosti psát:

$$\frac{1}{R(x)} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (29)$$

kde znaménko diferenciální rovnice závisí na volbě souřadnicového systému resp. způsobu deformace nosníku. Po dosazení za křivost je pak diferenciální rovnice průhybové čáry:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{R(x)} = \pm \frac{M_O(x)}{E \cdot I_z} \quad (30)$$

Pro sousední průřezy ($x \rightarrow 0$) platí, že je křivost derivací úhlu natočení:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (31)$$

Úhel natočení sousedních průřezů můžeme určit vztahem:

$$\varphi(x) = \int d\varphi = \int \frac{M_O(x)}{E \cdot I_z} dx \quad (32)$$

Pro malé úhly φ , obr.6, dále platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \varphi \approx \frac{dy}{dx}, \quad (33)$$

tj. úhel natočení je derivací průhybu $y(x)$ podle souřadnice x . Průhyb nosníku pro sousední průřezy určíme z předpokladu:

$$y(x) = \int dy = \int \varphi(x) dx \quad (34)$$

Konkrétním příkladem využití výše uvedeného výpočtu deformací necht' je konstrukční prvek (vetknutý nosník) na obr.4. Pokud nás bude zajímat průběh ohybového momentu po délce uvedeného nosníku, obr.4, zatíženého rovnoměrným spojitým zatížením od vlastní hmotnosti, pak pro konkrétní délkový úsek nosníku x a při znalosti velikosti spojitě zatížení q můžeme psát vztah pro výpočet ohybového momentu:

$$M_O(x) = F_q \cdot \frac{x}{2} = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (35)$$

Odtud po dosazení pro křivost:

$$k(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{M_O(x)}{E \cdot I_z} = \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I_z}, \quad (36)$$

úhel natočení:

$$\varphi(x) = \int k(x) dx = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I_z} + c_1 \quad (37)$$

a průhyb:

$$y(x) = \int \varphi(x) dx = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I_z} + c_1 \cdot x + c_2 \quad (38)$$

Dále musíme předpokládat pro řešení okrajové fyzikální podmínky, tj. ve vetknutí nedojde k natočení ani průhybu (místo vetknutí je popsáno podélnou souřadnicí $x=l$):

$$\varphi(l) = 0 \Rightarrow \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_z} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_z}, \quad (39)$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_z} - \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_z} \cdot l + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_z} \quad (40)$$

Závěrem řešení je zjištění:

$$k(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I_z}, \quad (41)$$

$$\varphi(x) = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I_z} - \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_z} = \frac{q}{6 \cdot E \cdot I_z} \cdot (x^3 - l^3), \quad (42)$$

$$y(x) = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I_z} - \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_z} \cdot x + \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_z} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I_z} \cdot (x^4 - 4 \cdot l^3 \cdot x + 3 \cdot l^4). \quad (43)$$

Vypočtené vztahy využijeme pro určení hodnoty křivosti, natočení a průhybu na konkrétním délkovém úseku konstrukce při ztížení rovnoměrným spojitým zatížením od vlastní hmotnosti nosníku. Na výše uvedeném postupu je ukázán příklad napětově-deformačního analytického řešení konkrétní úlohy návrhu a kontroly konstrukce namáhané ohybem.

Určení napětí a deformace od krouťícího momentu

Prosté kroucení nastává, působí-li v rovině průřezu dvojice sil, její moment M_K se nazývá krouťící moment. Kroucení se často vyskytuje v biomechanice, např. se jedná o kroucení částí kostí či protetických náhrad. Analyticky byly odvozeny přesné vztahy pro řešení kroucení průřezu tvaru kruhu, mezikruží a u průřezu eliptického plného i dutého, kdežto pro průřezy obdélníkové a čtvercové, podávají analytické metody výpočtu jen přibližné výsledky. Za prostého kroucení vznikne v obecném bodě (se souřadnicemi y, z) průřezu jen tangenciální napětí, jehož složky rovnoběžné s osami y, z jsou τ_{xy}, τ_{xz} , kladné ve smyslu kladných os. Je-li průřez namáhaný krutem středově souměrný k těžišti, předpokládejme také, že jsou k němu středově souměrné i vnitřní síly. Tohoto můžeme využít při řešení kroucení kruhového průřezu, neboť má tangenciální napětí v kterémkoliv bodě kruhového průřezu směr kolmý k osám souměrnosti, které procházejí tímto bodem průřezu a těžištěm průřezu, obr.7. Označme toto napětí ve směru tečném τ_K . Pevnostní výpočet vychází ze znalosti Hookeova zákona pro krut/smyk, přičemž velikost tangenciálního napětí v krutu:

$$\tau_K = G \cdot \gamma, \quad (44)$$

kde γ je zkosení a G je modul pružnosti ve smyku, který můžeme určit ze vztahu:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)},$$

kde μ je Poissonovo číslo, které je pro většinu kovů 0,33 a E je modul pružnosti v tahu, tzv. Youngův modul. Předpokládáme-li podle obr.7 kruhový průřez a

$$\frac{\gamma}{\varphi} = \frac{d}{2 \cdot l} = \frac{r}{l}, \quad (45)$$

kde r je poloměr kruhového průřezu a φ je úhel zkroucení, pak:

$$\gamma = \frac{\varphi \cdot r}{l}. \quad (46)$$

Protože je vždy úhel φ stejný pro libovolnou kružnici o poloměru ρ se středem v těžišti průřezu (obr.7), tato kružnice se při zkroucení pouze pootočí kolem svého středu o uvedený úhel. Takže při kroucení kruhové tyče se dva rovnoběžné průřezy proti sobě vzájemně pootočí o úhel φ . Zkosení vláken γ je v ose tyče nulové a k okraji lineárně narůstá a stejně tak musí se vzdáleností od středu lineárně narůstat i tangenciální napětí, obr.7:

$$\tau_{Ki} = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_K. \quad (47)$$

Vnitřní síla, která je dána tangenciálním napětím τ_{Ki} působícím na plošce dA vzdálené ρ od těžiště, má k těžišti moment o velikosti:

$$M_{Ki} = \rho \cdot F_{Ki} = \rho \cdot \tau_{Ki} \cdot dA. \quad (48)$$

Vnitřní síly v průřezu musí dát stejný krouťící moment jako M_K tj. podmínka ekvivalence k těžišti má tvar:

$$M_K = \int_A \rho \cdot \tau_{Ki} \cdot dA \quad (49)$$

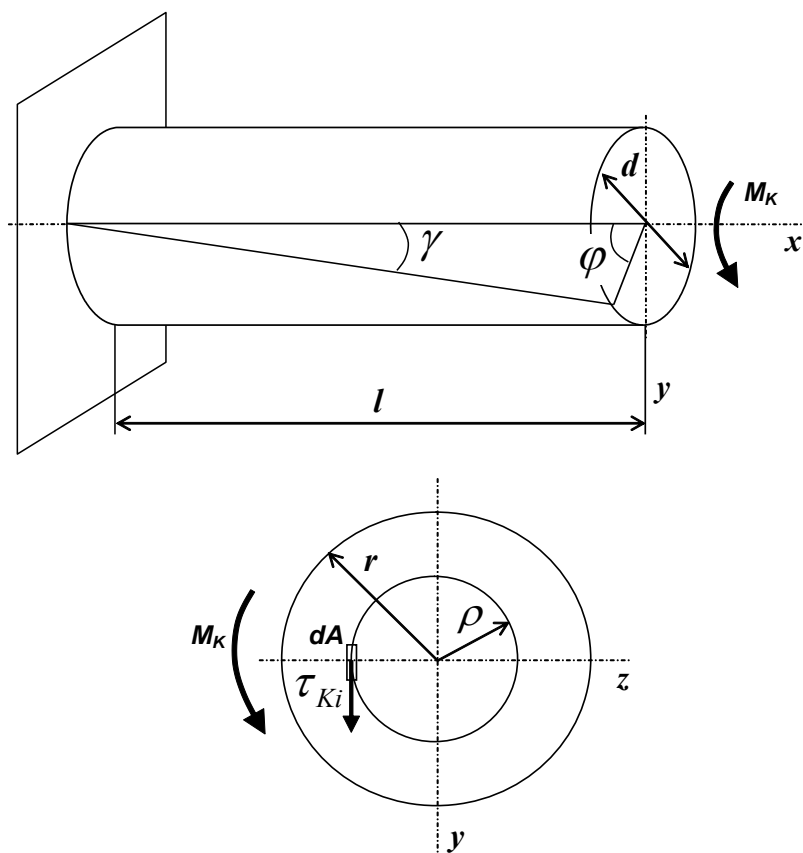
a dosadíme-li za τ_{Ki} , dostaneme:

$$M_K = \int_A \frac{\rho^2 \cdot \tau_K}{r} dA = \frac{\tau_K}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_K}{r} \cdot I_p \quad (50)$$

kde I_p je polární moment setrvačnosti, $r=d/2$ je vnější poloměr resp. vzdálenost nejvzdálenějšího vlákna od těžiště průřezu, τ_K je napětí τ_{Ki} na obvodu tyče a M_K je kroutící moment. Z uvedeného vztahu můžeme určit:

$$\tau_{Ki} = \frac{M_K}{I_p} \cdot \rho \Rightarrow \tau_K = \frac{M_K}{W_K} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_K}{W_K}, \quad (51)$$

kde W_K je analogicky s ohybem zavedená veličina průřezový modul v krutu, jenž bývá pro základní tvary průřezů odvozen a uveden v tabulkách či katalogích.



Obr.7: Schéma deformace tyče namáhané kroutícím momentem.

Výpočet průřezového modulu se tedy liší podle tvaru zkrucovaného profilu. Obecně výpočet zohledňuje vzdálenost r nejvíce namáhaných vláken profilu k neutrální ose a polární moment setrvačnosti profilu I_p . Pro kruhový průřez je průřezový modul určen vztahem:

$$W_K = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi \cdot r^3}{2}. \quad (52)$$

Polární kvadratický moment a průřezový modul v krutu pro průřez mezikruží je, obr.8:

$$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (d_1^4 - d_2^4) \Rightarrow W_K = \frac{\pi \cdot (d_1^4 - d_2^4)}{16 \cdot d_1}. \quad (53)$$

Pokud předpokládáme, že velikost napětí:

$$\tau_K = G \cdot \gamma = \frac{M_K}{W_K} \leq \tau_D, \quad (54)$$

přičemž musí být splněna pevnostní podmínka, kde τ_D je maximální dovolená hodnota namáhání daného materiálu v krutu. Z uvedených vztahů dostáváme také úhel zkосу, resp. zkroucení pro kruhový průřez:

$$\gamma = \frac{M_K}{W_K \cdot G} = \frac{M_K \cdot r}{I_P \cdot G}, \quad \varphi = \frac{M_K \cdot l}{I_P \cdot G}, \quad (55)$$

za předpokladu konstantního M_K . Výše popsaná jednotlivá namáhání však obvykle nepůsobí samostatně, ale v různých kombinacích. Materiál je tedy vystaven složenému namáhání, mluvíme o kombinovaném namáhání.

Řešení prostorového-složeného ohybu

Jedná se o běžný případ, kdy v rovině, v které ohybový moment působí, neleží žádná z dvou hlavních centrálních os průřezu. V tomto případě rozložíme vektor ohybového momentu do složek ve směru hlavních os, obr.3:

$$M_O = M_y + M_z. \quad (56)$$

Potom je výsledné napětí:

$$\sigma_O = \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}, \quad (57)$$

kde z a y jsou souřadnice nejbližšího bodu průřezu od neutrální osy, v které leží počátek souřadného systému.

Řešení kombinace ohybu a tahu/tlaku

Kombinace obvykle nastane, působí-li osová síla F_N mimo těžiště průřezu. Tento případ namáhání je v biomechanice běžný, setkáme se s ním např. u namáhání kostí. Při řešení se síla přeloží do těžiště průřezu a průřez je potom namáhán osovou silou F_N a momentem $M_O = F_N \cdot a$, kde a je výstřednost, tj. vzdálenost působíště síly F_N od těžiště průřezu. Moment M_O se potom rozloží do složek k osám y a z :

$$M_O = M_y + M_z. \quad (58)$$

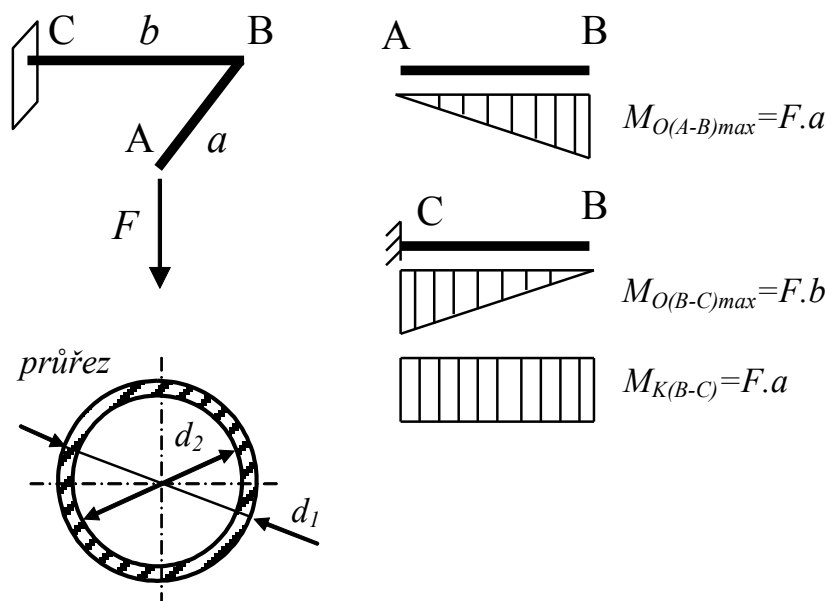
Výsledné normálové napětí se potom vypočítá jako součet všech normálových složek napětí:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}, \quad (59)$$

kde σ_N je napětí od normálové síly F_N (A je plocha průřezu), σ_{M_y} je napětí od složky ohybového momentu M_y , σ_{M_z} je napětí od složky ohybového momentu M_z . Je zřejmé, že neutrální osa již v tomto případě nebude procházet těžištěm průřezu.

Řešení kombinace ohybu a krutu

Častým případem v biomechanice je kombinace namáhání ohybem a krutem, např. při namáhání částí kosterního systému či protéz. V případě kruhového průřezu budou nejvíce namáhány dva body, které jsou nejbližší od neutrální osy ohybu. Necht' např. máme konstrukci tvaru páky (tvar L), obr.8.



Obr.8: Příklad vzniku kombinovaného namáhání se zobrazením vnitřních momentových účinků.

Ohybové napětí určíme známým vztahem:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_D \quad (60)$$

a smykové napětí od krutu:

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} \leq \tau_D, \quad (61)$$

kde W_o a W_K jsou moduly průřezu v ohybu a krutu, které jsou dané tvarem průřezu namáhané konstrukční části. Pro pevnostní dimenzování je potřeba použít některou z podmínek pevnosti.

Pro Guestovu (Trescovu, „ τ_{\max} “) a HMH podmínku pevnosti lze psát:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_o^2 + (\alpha \cdot \tau_K)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{W_o}\right)^2 + \left(\alpha \cdot \frac{M_K}{W_K}\right)^2} \leq \sigma_D, \quad (62)$$

kde α je dána použitou teorií výpočtu. Pro houževnaté materiály je $\alpha = 2$ v případě teorie „ τ_{\max} “ a $\alpha = \sqrt{3}$ v případě teorie HMH.

Řešení kombinace tahu a krutu

V tomto případě opět v bodech průřezu působí normálové (od tahu) a smykové (od krutu) napětí. Jedná se tedy o stejný charakter napjatosti jako kombinace ohyb-krut. V případě kruhového průřezu působí největší napjatost ve všech bodech na povrchu tyče. Můžete tedy psát pevnostní podmínku:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_N^2 + (\alpha \cdot \tau_K)^2} = \sqrt{\left(\frac{F_N}{A}\right)^2 + \left(\alpha \cdot \frac{M_K}{W_K}\right)^2} \leq \sigma_D. \quad (63)$$

Řešení kombinace ohybu a smyku

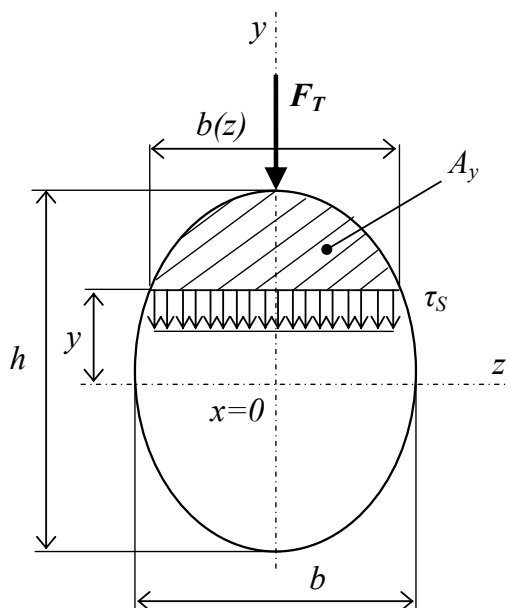
V bodech průřezu působí normálové napětí od ohybu σ_N a smykové napětí τ_S , tentokrát však od posouvající síly namáhající např. tyč na stříh (působí v rovině průřezu tj. kolmo k podélné ose). Platí tedy obdobné předpoklady jako pro kombinaci ohyb-krut nebo tah-krut.

Rozborem napjatosti v průřezu v závislosti na délce konstrukčního dílu a jeho uložení vyplynulo, že u většiny konstrukčních částí o jejich pevnosti rozhoduje pouze normálové napětí. Smykové

napětí se uplatní pouze u velice krátkých prvků s délkou řádově rovnou jejich charakteristickému rozměru (šířce, atp.). Hodnoty smykového napětí lze s dostatečnou přesností určit pomocí tzv. Žuravského vztahu, který je vhodný pro výpočet štíhlých průřezů, $h/b > 2$, u kterých předpokládáme, že je podél šířky průřezu b_y napětí τ_s konstantní:

$$\tau_s = \frac{F_T \cdot S_y}{b(z) \cdot I_z}, \quad (64)$$

kde F_T je posouvající síla v uvažovaném řezu, S_y je statický moment plochy A_y vymezené rovnoběžkou s osou z ve vzdálenosti y vzhledem k neutrální ose tj. těžišti celého průřezu, ke kterému je statický moment počítán, $b(z)$ je šířka průřezu v místě, kde napětí τ_s počítáme, I_z je kvadratický moment celého průřezu k neutrální ose resp. ose z .

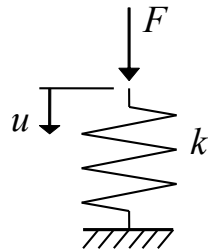


Obr.9: Schéma průřezu prutu namáhaného na stříh.

Řešení jednoosé deformace metodou konečných prvků

Výše uvedené tradiční analytické metody mají nevýhodu, že jsou vhodné pouze pro určitý typ konstrukčních prvků a lze jimi obecně řešit jen velmi jednoduché případy. Tyto postupy, zvláště při studiu a konstruování složitých systémů, jsou v dnešní době nepoužitelné. Proto jsou v moderních výpočtových CAE (Computer Aided Engineering) systémech využity nové metody založené na matematických numerických metodách konečných prvků a konečných diferencí. Mezi moderními metodami napětí-ově-deformační analýzy dnes dominuje metoda konečných prvků (MKP), která je používána i v jiných oblastech inženýrských výpočtů (vedení tepla, proudění kapalin, elektřina a magnetismus). MKP je založena na zcela jiném principu než analytické metody, zatímco analytické metody jsou založeny na diferenciálním a integrálním počtu, MKP je založena na méně známém počtu variačním, tj. hledáme minimum nějakého funkcionálu. Základním funkcionálem v deformačně-napětí-ově analýze pružných těles je jejich energie napjatosti. Což je potenciální energie nahromaděná v jednotce objemu hmoty při jeho přetvoření. U dokonale pružného tělesa se energie napjatosti rovná deformační práci. Deformační práce je práce spotřebovaná na deformaci tělesa a dá se z tělesa při návratu do původního nedeformovaného tvaru zpětně získat (např. pružiny). V souladu s definicí funkcionálu je energie napjatosti číselná hodnota, přiřazena funkcím popisujícím deformační posuvy jednotlivých bodů tělesa. Jsou-li posuvy základními neznámými funkcemi, jedná se o deformační variantu MKP. Pro libovolný deformovaný tvar tělesa je možné tuto energii určit z přetvoření a napětí ve všech bodech tělesa. Při konkrétním zatížení a vazbách s okolím nemůže těleso zaujmout libovolný tvar, ale jeho deformovaný tvar je

jednoznačně definován. Z možných deformovaných tvarů tělesa je to ten energeticky nejméně náročný, což matematicky vyjadřuje věta o minimu kvadratického funkcionalu. Příslušným energetickým funkcionalém, jehož minimum určuje skutečný deformovaný tvar tělesa, je celková potenciální energie tělesa Π . Celková potenciální energie tělesa je definovaná jako rozdíl energie napjatosti tělesa U a potenciální energie vnějšího zatížení W_p .



Obr.10: Schéma deformace tělesa-pružiny zatížené vnější silou.

Pokud vyjádříme vztahy pro vnitřní a vnější energii tělesa (pružiny) dle obr.10, vnitřní deformační energie v deformované pružině je:

$$U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot u = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot u) \cdot u = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 . \quad (65)$$

Potenciální energie vnější síly je:

$$W_p = F \cdot u . \quad (66)$$

Odtud celková potenciální energie systému:

$$\Pi = U - W_p \quad (67)$$

a minimum potenciální energie:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = k \cdot u - F = 0 \Rightarrow F = k \cdot u , \quad (68)$$

což je podmínka rovnováhy pro zatíženou pružinu. Výsledkem uvedené úvahy je převedení úlohy řešení parciálních diferenciálních rovnic na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\{f\} = [K] \cdot \{u_p\} \Rightarrow \{u_p\} = [K]^{-1} \cdot \{f\} , \quad (69)$$

kde K je pásová matice soustavy (tzv. matice tuhosti) s nenulovými prvky soustředěnými pouze v pásu kolem hlavní diagonály a charakterizující vlastnosti objektu. Vektor u_p je vektor neznámých posunutí v uzlových bodech sítě, jenž charakterizuje chování objektu, a f je vektor známých uzlových sil (od vlastní tíhy, vnějšího zatížení, apod.) charakterizující vliv okolí na objekt. Deformační varianta MKP tedy vychází z Lagrangeova variačního principu, přičemž neznámou veličinou je právě pole posuvů.

V praxi je vždy výpočet realizován za pomoci počítačového software. Pro přípravu vstupních dat se vytvoří geometrický model tělesa nebo soustavy, který se spojitě (beze zbytku), rozdělí na prvky konečných rozměrů. Základním prvkem v rovině je čtyřúhelník, v prostoru pak šestistěn, někdy je nutné použít zjednodušené tvary prvku (trojúhelník, čtyřstěn). Rohy těchto prvků jsou uzlovými body, v nichž se určují neznámé hodnoty posuvů, strany (hrany) prvků vytvářejí síť. Bodů, ve kterých určujeme posuvy, nemůže být v praxi nekonečně mnoho. U trojrozměrné úlohy představuje každý uzlový bod sítě tři neznámé parametry a to hodnoty jeho posuvů ve třech směrech. Všem prvkům je třeba zadat parametry materiálu (pro izotropní lineárně elastický materiál je to modul pružnosti a Poissonovo číslo). Dále se definují okrajové podmínky (vazby, zatížení), které např. pro statickou úlohu musí zajistit jednoznačnou polohu tělesa v prostoru. Následuje spuštění řešiče, což je program, který na základě vstupních hodnot sestaví a vyřeší soustavu rovnic s neznámými posuvy a z nich spočítá pretvoření a napětí. Poslední částí programového systému je postprocesing pro zpracování výsledků. Umožňuje znázornit rozložení výstupních parametrů (např. složek napětí, posuvů, atd.) v resp. na tělese nebo soustavě. Dále umožňuje počítat redukovaná napětí a další hodnoty potřebné pro posuzování mezních stavů.

VI. Přehled použité a doporučené literatury

- [1] Beneš J., Stránský P., Vítek F.; *Základy lékařské biofyziky*, Praha: Nakladatelství Karolinum, 2007
- [2] Cretan M., Gafitanu M., Munteanu F.; *The geometrical parameters of the human intervertebral disc measured using CT and AUTOCAD*, Baia Mare: sborník příspěvků 7th International Multidisciplinary Conference, 2007
- [3] Daniel M., Mareš T.; *Experimentální biomechanika*, Praha: Nakladatelství ČVUT, 2008
- [4] Devaris H., Morales M., Albino H.; *Engineering Biomechanics*, Mayagüez: University of Puerto Rico, 2003
- [5] Dungal P., Matějček M.; *Ortopedie*, Praha: Grada Publishing, 2005
- [6] Dylevský I.; *Funkční anatomie*, Praha: Grada Publishing, 2009
- [7] Fink A.; *A physicist's guide to the ear*, Northfield: Carleton College, 2004
- [8] Havránek A.; *Úvod do bioreologie*, Nakladatelství Karolinum, 2007
- [9] Hoffmann K.; *An introduction to measurements using strain gages*, Darmstadt: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 1989
- [10] Hollister S.; *Biomechanics*, Michigan: University of Michigan, 2007
- [11] Hollister S.; *Biosolid Mechanics: Modeling and Applications*, Michigan: University of Michigan, 2007
- [12] Hynčík L., Martinec P., Cimrman R.; *Kritéria poranění a jejich implementace do biomechanického modelu člověka*, Dílčí zpráva o řešení projektu č. FT-TA/024, 2007
- [13] Chundela L.; *Ergonomie*, Praha: Nakladatelství ČVUT, 2005
- [14] Chundela L.; *Strojírenská ergonomie - příklady*, Praha: Nakladatelství ČVUT, 2005
- [15] Klement J., Plánička F., Vlk M.; *Modelová podobnost, elektrická odporová tenzometrie, experimentální určování zbytkových napětí, vyhodnocení experimentálně získaných dat*, Plzeň: Západočeská univerzita, 2004
- [16] Kutílek P., Mikšovský J.; *Fyzikální praktikum I, II*, Praha: Nakladatelství ČVUT, 2009
- [17] Nedoma J., Stehlík J., Bartoš M.; *Biomechanika lidského skeletu a umělých náhrad jeho částí*. Praha: Nakladatelství Karolinum, 2006
- [18] Otáhal S.; *Patobiomechanika a Patokinesiologie: kompendium*, Praha: Sdružené pracoviště funkční anatomie a biomechaniky University Karlovy a Českého vysokého učení technického v Praze, 2000 [cit. 2010-12-30]. Dostupné z WWW: < <http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpc>>.
- [19] Pettrýl M., Lipanská E.; *Stavební mechanika 11 a 21: mechanika tuhých a poddajných těles v příkladech*, Praha: Nakladatelství ČVUT, 2003
- [20] Shan G., Bohn Ch.; *Anthropometrical data and coefficients of regression related to gender and race*, Muenster: University of Muenster, 2003
- [21] Sosna A.; *Základy ortopedie*, Praha: Nakladatelství Triton, 2001
- [22] Standring S.; *Gray's anatomy: The Anatomical Basis of Clinical Practice*, London: Elsevier 2004
- [23] Šiblová H., Hlinecká J., Kačírková K.; *Vyšetřovací metody hybného systému*, Učební pomůcka k předmětu pro střední školy, 1995

- [24] Tempel B.; The auditory system, Washington: University of Washington, School of Medicine, 2007
- [25] Živčák J.; Základy bioniky a biomechaniky, Prešov: ManaCom, 2004

Dále jsou k objasnění problematiky použity propagační materiály a návody výrobců a dodavatelů přístrojů a zařízení Laboratoře biomechaniky Fakulty biomedicínského inženýrství ČVUT v Praze.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ